GALILEO GALILEI E LA PROBABILITÀ

Mario Barra

Riassunto

In questo articolo vengono analizzati gli scritti di Galilei relativi alla teoria del Calcolo delle Probabilità. I risultati conseguiti da questo autore, pur facendo riferimento a dei casi particolari, risultano facilmente generalizzabili, totalmente ineccepibili e, anzi, in un caso, più profondi di quanto dimostrato successivamente da Gauss per elaborare, in generale, la sua "curva degli errori".

Si analizzano in particolare i seguenti lavori di Galileo Galilei:

(a) Sopra le scoperte de i dadi,
(b) *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Giornata terza,
(c) Scritture concernenti il quesito in proposito della stima d'un cavallo.

In (a) Galilei raggiunge i seguenti risultati (già noti a Cardano):

– esprime la distribuzione del numero dei casi favorevoli e dei casi possibili per i valori della somma di tre dadi, precisando, in questi casi particolari, i valori delle permutazioni e delle distribuzioni con o senza ripetizione delle configurazioni possibili;
– fa riferimento, in modo intuitivo e in un esempio, alla "Legge dei Grandi Numeri" in collegamento con la "Legge Empirica del Caso".

In (b) Galilei esprime alcune considerazioni qualitative, sicuramente originali, sulla distribuzione degli errori di una misurazione strumentale, in particolare affermando che:

– in una misurazione strumentale gli errori sono inevitabili;
– tali errori sono distribuiti simmetricamente;
– gli errori piccoli sono più probabili di quelli grandi;
– effettuando più misurazioni, la maggioranza dei valori si distribuisce intorno al valore vero della lunghezza che viene misurata.

Galilei si serve di queste proprietà per confutare mirabilmente alcuni aspetti della concezione cosmologica Aristotelica sostenuta da Chiaromonti.

In (c) Galilei, pur non collegandosi alle considerazioni enunciate in (b) smentisce giustamente la validità generale di quanto aveva affermato. In particolare il nostro autore:
– esamina in modo approfondito il problema degli errori di valutazione, sostenendo la necessità di tenere conto delle peculiarità dei casi esaminati;
– svaluta l'importanza della media aritmetica (sopravvalutata in generale da Gauss);
– indica correttamente l'utilità della media geometrica per risolvere alcune questioni.

Sopra le scoperte de i dadi[1]

ARGOMENTO: viene determinata la probabilità delle possibili somme con tre dadi, numerati ciascuno da 1 a 6.

TESTO E COMMENTO:[2]

> ...ancor che il *9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e 'l 11,* per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che *la lunga osservazione* ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che 'l 9 e 'l 12.

Galilei considera che, nella somma di tre dadi, sia il 9 che il 10 si ottengono con lo stesso numero di *triplicità* (i valori visibili sui tre dadi). Infatti:

la somma 9 si compone con: 1.2.6; 1.3.5; 1.4.4; 2.2.5; 2.3.4, 3.3.3; cioè con *6 triplicità*.

La somma 10 si compone con: 1.3.6; 1.4.5; 2.2.6; 2.3.5; 2.4.4, 3.3.4;

[1] Galilei G., Sopra le scoperte de i dadi, *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale (E.N.) di A. Favaro, Tipografia La Barbèra 1897, Firenze (1718), Vol. VIII, pag. 591-594. Poiché il lavoro è compreso in sole quattro pagine, non viene riportata, a fianco delle citazioni, la pagina del testo cui si fa riferimento. "Sopra le scoperte de i dadi" è stato probabilmente scritto negli anni tra il 1612 e il 1623, poco dopo l'arrivo di Galilei a Firenze.

[2] Il testo verrà indicato in carattere più piccolo. Il corsivo mette in evidenza le affermazioni di Galilei più importanti.

sempre con *6 triplicità*, e non in altri modi. Con questa premessa viene enunciato l'oggetto della sua ricerca.

IL PROBLEMA: lanciando 3 dadi, le somme 9 e 10 si ottengono con lo stesso numero di triplicità. Ma allora perché, in pratica, si osserva che è più frequente ottenere 10 piuttosto che 9?

Galilei dà la risposta al caso particolare in un quadro generale:

> Ora io per servire a chi mi ha comandato[3] che io deva produr ciò che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero con speranza non solamente di scior questo dubbio ma di aprir la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio comparite e aggiustate.

Galilei, in tutto il suo lavoro,[4] fa riferimento intuitivamente alla Legge dei Grandi Numeri (attraverso la probabilità si calcola che è sempre più probabile che la frequenza relativa tenda alla probabilità) e alla Legge Empirica del Caso (quanto affermato dalla teoria può essere verificato in pratica). Infatti queste sono le sue prime parole:

> Che nel gioco de' dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmene e più frequentemente scoprirsi che questi.

Galilei comincia l'analisi del problema elencando i casi possibili che sono le *"scoperte di un dado"* e intende che le sei scoperte di un dado sono "equiprobabili" perchè *"egli può* indifferentemente *fermarsi, sopra ciascuna"* delle 6 facce.

Il testo prosegue considerando praticamente[5] che le scoperte dei singoli dadi sono logicamente indipendenti (tutte le combinazioni teoricamente possibili sono effettivamente possibili) e che per due e tre dadi, ci sono rispettivamente 36 e 216 casi possibili.

> *Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado,* …avvenga che ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo… *onde è manifesto esser 6 vote 6, cioé 36. E se noi aggiungeremo un terzo dado,…* 6 volte 36, cioè 216, tutte fra di loro differenti. Ma perchè i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 etc. sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte*; e se noi*

[3] Galileo interviene su richiesta di qualcuno che possiamo congetturare essere il Gran Duca di Toscana.

[4] Vedi anche, ad esempio, la prima citazione di Galilei riportata, in cui si fa riferimento alla *lunga osservazione*, i cui risultati verranno analizzati teoricamente.

[5] Esprimendosi in termini moderni.

> *ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, aremo aperta la strada di venire in notizia di quello che cerchiamo:* e basterà far tale investigazione dal 3 sino al 10, perché quello che converrà ad uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Dunque per tre dadi ci sono 216 casi possibili. Ma poiché le somme differenti, che vanno da 3 a 18, sono 16, che non divide 216, è necessario che alcune somme siano più probabili di altre. Poiché infine su ogni dado la somma di due facce opposte è 7, su tre dadi tale somma vale 21. Dunque se la somma delle facce che vediamo vale: 3, 4, 5, ..., 18, la somma delle facce opposte deve essere rispettivamente: 18, 17, 16, ..., 3. Così infine, poiché il numero di modi per ottenere una certa somma S sulle facce visibili equivale al numero di modi per ottenere la somma 21-S sulle facce opposte (sossopra), sarà sufficiente analizzare i numeri dei modi per ottenere le somme da 3 a 10, perché contemporaneamente si avranno quelli dei *sossopra*: rispettivamente da 18 a 11.

Segue ora l'analisi del punto cruciale della questione, con la distinzione tra le possibili *triplicità* e l'indicazione dei loro 'anagrammi' possibili. Queste triplicità possono essere di tre tipi: quelle *che si compongono da 3 numeri eguali,* che si possono ottenere *in un modo solo*, quelle *che nascono da 2 numeri eguali e dal terzo differente* che *si producono in 3 maniere* (es.: la triplicità: 1.1.2 si può ottenere anche con: 1.2.1 e con 2.1.1) e *quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti* che *si formano in 6 maniere* (es.: 1.2.3; 1.3.2; 2.1.3; 2.3.1; 3.1.2; 3.2.1). Per illustrare nei particolari le conseguenze delle sue analisi, Galilei produce la seguente tabella, dove in alto compaiono le somme possibili e in basso, i numeri dei modi, in totale, per ottenerle. Addizionando questi totali si ha la metà dei casi possibili: 27+25+21+ +15+10+6+3+1 = 108. I rimanenti si ottengono per i risultati sui loro *sossopri.*

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.2.1	3		3		1
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1		6				
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3		10						
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3		15								
4.3.3	3	3.3.3	1		21										
	27		25												

Dunque in particolare il problema posto inizialmente viene risolto. La somma 10 è più vantaggiosa perché:

– 10 si può ottenere come somma di: 6.3.1, 6.2.2, ..., 4.3.3, e queste triplette si possono 'anagrammare' rispettivamente in: 6, 3, ..., 3, modi, con un totale di 27 casi favorevoli;

– 9 si può ottenere come somma di: 6.2.1, 5.3.1, ..., 3.3.3, che si possono 'anagrammare' rispettivamente in: 6, 6, ..., 1, modi, con un totale di 25 casi favorevoli.

La prima somma è più frequente della seconda, perché ha due casi favorevoli in più.

In termini attuali possiamo dire che 10 ha probabilità 27/216 e 9, probabilità 25/216.

Ci si può meravigliare del fatto che la *lunga osservazione* sia così precisa da riuscire a cogliere una differenza di probabilità di 2/216, che risulta minore di 1/100.

E' possibile soltanto dire che a quei tempi si giocava molto!

Infine Galilei conclude la sua analisi dicendo:

> da questa tavola potrà ogn'uno che intenda il gioco, andar puntualissimamente compassando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, de gl'incontri e di qualunque altra particolar regola e termine che in esso giuoco si osserva, etc.

CONCLUSIONI: Galilei calcola, di fatto, la probabilità delle possibili somme di tre dadi.[6] Il problema era già stato risolto da Cardano e forse Galilei può esserne venuto a conoscenza attraverso gli allievi di quest'altro grande risolutore di problemi probabilistici. Ma Galilei, al contrario di Cardano, esprime la soluzione con grande chiarezza, senza errori e con una visione, certamente ancora intuitiva, ma notevolmente unitaria e, si può dire, didattica, dei vari aspetti coinvolti. Così, nello spazio di soltanto quattro pagine, oltre alla soluzione del problema in oggetto e alla sua chiara analisi combinatorica, troviamo i prodromi positivi della definizione classica della probabilità, come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili,[7] purché questi siano *indifferenti*, e l'utilizzazione delle proprietà di indipendenza logica e di indipendenza stocastica. Troviamo in particolare, come già detto, il collegamento fra teoria ed esperienza, con l'intuizione della Legge dei Grandi Numeri e della Legge Empirica del Caso.

Ma anche questo collegamento, sebbene con i limiti già espressi, è già presente in Cardano.

Invece, per quanto riguarda gli altri due lavori di Galilei, relativi al cal-

---

[6] Questo contributo di Galilei è noto e si trova su molti libri e articoli di storia della matematica e in particolare in: I. Todhunter: "*A History of the Mathematical theory of Probability*", Macmillan, 1865. Ci piace indicare in particolare anche un lavoro di due grandi maestri di chi scrive: Lombardo Radice L., Segre B., "Galileo e la matematica", *Saggi su Galileo Galilei*, G. Barbèra, Firenze, 1967. In questo lavoro vengono già trattati brevemente sia il problema dei dadi, sia quello della stima di un cavallo. Non si ha notizia invece di altre pubblicazioni che si riferiscano agli altri apporti di Galilei alla teoria del calcolo delle probabilità, trattati nel presente articolo (essenzialmente: descrizione qualitativa della distribuzione degli errori sperimentali e critica "anticipata" delle posizioni generali di Gauss).

[7] Definizione data nel 1700 da Jakob Bernoulli.

colo delle probabilità,[8] i contributi di questo grande scienziato, possono essere considerati totalmente innovativi.

Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo: Giornata terza[9]

CONTESTO: nel novembre 1572 Ticho Brahe (1546-1601) osservò una nuova stella nella costellazione di Cassiopea, molto brillante e visibile anche di giorno. Secondo la teoria aristotelica del tempo la stella poteva essere localizzata: nel mondo sotto la luna[10] dei corpi celesti corruttibili e variabili a causa della vicinanza con la terra, oppure sopra la luna, ma, in questo caso, in contrasto con la teoria aristotelica della eternità ed invariabilità della volta celeste.

Brahe (*De Nova Stella*, 1573), favorevole all' ipotesi che la stella appartenesse al mondo delle stelle fisse, asseriva così che erano possibili mutamenti della volta celeste sopra la luna, in contrasto con Aristotele.

---

[8] Contributi che verranno analizzati qui di seguito.

[9] Galilei G., E.N., vol. VII, pag. 299-349. Nel Dialogo Galilei vuole confutare la teoria geocentrica di Aristotele e Tolomeo ed affermare quella eliocentrica di Copernico (sono questi i "due massimi sistemi"). Il lavoro è stato iniziato dal nostro autore nel '24, sospeso nel '28 (per grave malattia) e nel '29. Nel gennaio '30 viene letto a Pisa e l'Accademia dei Lincei, e in particolare Federico Cesi, vuole stamparlo. Per la morte di quest'ultimo Galilei, nel marzo del '30, si reca a Roma per consegnarlo all'autorità ecclesiastica. I "superiori" di quest'ultima iniziano ad opporsi alla divulgazione di quest'opera, sebbene Urbano VIII avesse precedentemente dimostrato, pubblicamente, (*Adulatio perniciosa*) stima e ammirazione per Galilei. Si giunge ad un compromesso: la teoria copernicana viene presentata come pura ipotersi matematica. Ma questo non è stato sufficiente ad ingannare i reazionari ed evitare a Galilei la tragedia della sconfitta. L'opera viene pubblicata nel febbraio del '32, ma viene sequestrata dall'Inquisizione dopo cinque mesi. Più che un libro di astronomia e di fisica, come scrive A. Koyré (*Etudes galiléennes*, Parigi, 1939), il *Dialogo* rappresenta uno dei più importanti manifesti del pensiero rinascimentale: dal punto di vista scientifico, religioso, filosofico e pedagogico. Oltre questo, alcuni meriti principali dell'opera, che ci interessa ora sottolineare, sono: - sostegno della teoria copernicana e confutazione delle argomentazioni avverse (i corpi cadono in verticale non perché la terra è il centro immobile del mondo, infatti nel sottocoperta di una nave non potremmo accorgerci se questa è ferma o in movimento uniforme); - importanza della considerazione dei valori intermedi fra vero e falso e in generale fra gli "opposti" pitagorici e aristotelici (La considerazione dei valori intermedi costituisce il fondamento del ragionamento probabilistico. Così le misurazioni strumentali sono quasi sempre inesatte, ma la grandezza degli errori è inversamente proporzionale alla loro probabilità. Così nel sopracoperta di una nave in movimento uniforme, il fumo va più indietro delle *gocciole cadenti* e per gli oggetti pesanti la differenza dalla verticale, è impercettibile. Ugualmente, il moto di rivoluzione della terra non è confutato dall'apparente invariabilità della grandezza delle stelle fisse: dipende dalla distanza!); - affermazione dell'importanza pedagogica del dialogo, dell'analogia (la terra è come gli altri pianeti), della sperimentazione e del ragionamento induttivo. Errori commessi nel *Dialogo*: Galilei pur avendo condotto delle indagini sperimentali sulle calamite (1626), non tiene conto dell'influenza della luna sulle maree e, a tale proposito, critica Keplero (che Galilei stima moltissimo in relazione ad altri argomenti) che sostiene questa posizione.

[10] *sotto al concavo dell'orbe lunare,* G. Galilei, E.N., p. 305.

Poco dopo la sua comparsa, la nuova stella iniziò a declinare in luminosità, finché scomparve alla fine del marzo 1574. Molte discussioni furono fatte e dodici matematici ed astronomi riaffermarono con Brahe, la falsità della dottrina aristotelica. Ma nel 1628 fu pubblicato un libro di Chiaramonti (*De Tribus novis stellis quae Annis 1572, 1600, 1604*) ove l'autore, utilizzando solo parzialmente i dati trovati fino ad allora, "dimostrava" che la distanza della nuova stella del 1572 dalla Terra, fosse minore della distanza Terra-Luna. Così la stella doveva trovarsi nel mondo sotto la luna, l'unico luogo ove erano possibili i cambiamenti per Aristotele.

ARGOMENTO: Galileo ricusa la conclusione di Chiaramonti dando ragione a Brahe e agli altri astronomi che sostengono che la Nova è situata nel cielo ad una distanza superiore a quella della luna e sostiene la propria tesi cercando delle contraddizioni nelle stesse affermazioni e nei metodi usati dal Chiaramonti, anche attraverso una formulazione qualitativa delle proprietà della distribuzione degli errori.

TESTO E COMMENTO: Galileo inizia la sua argomentazione calcolando la distanza della stella dal centro della Terra attraverso il metodo della parallasse in relazione a misurazioni effettuate da diversi punti della terra. Sostanzialmente[11] la stella è "lontana" perché le altezze minime e massime sull'orizzonte prese su un meridiano da diversi punti non differiscono fra loro più di quanto sia dovuto alla differente vicinanza al polo. Avverrebbe il contrario se la distanza della stella fosse *piccola in comparazione di quella del firmamento.*

> SALVIATI[12]...fu agevol cosa il poter prendere con istrumenti astronomici le sue altezze meridiane, tanto le minime sotto il polo, quanto le massime sopra; dalla conferenza delle quali altezze, fatte da diversi luoghi della Terra posti in varie distanze dal settentrione, cioè tra di loro differenti quanto all'altezze polari, si poteva argomentare la lontananza della stella. Imperocché, quando ella fusse stata nel firmamento tra le altre fisse, le sue altezze meridiane prese in diverse elevazioni di polo conveniva che fussero tra di loro differenti con le medesime differenze che tra esse elevazioni si ritrovavano; ...Ma *quando la lontananza della stella dalla Terra fusse assai piccola in comparazione di quella del firmamento, le altezze sue meridiane convien che, accostandoci al settentrione, crescano notabilmente più che l'altezze polari*; e da quel maggiore accrescimento, cioè dall'eccesso dell'accrescimento dell'elevazione della stella sopra l'accrescimento dell'altezza polare (che si chiama differenza di parallasse), si calcola prontamente, con metodo chiaro e sicuro, la lontananza della stella dal centro della Terra (p. 306).

[11] Non è possibile qui dare spazio agli aspetti tecnici, che, per altro, non interessano molto il tema trattato.

[12] Campanella afferma "Salviati è un gran Socrate, che fa partorire, più che non parturisce" (lettera del 5 agosto 1632, EN, XIV, p. 366).

DATI DISPONIBILI E METODOLOGIA ASTRONOMICA: per Galilei e Chiaramonti sono disponibili 12 osservazioni (p. 319) dell'altezza della stella e di quella polare, effettuate, in località diverse, da 13 astronomi (fra cui Brahe e fra cui due astronomi vengono elencati insieme). Fra queste 12 osservazioni è possibile scegliere 66 coppie per calcolare, con ciascuna di queste, il valore della parallasse.

IL PROBLEMA: Chiaramonti si limita a 12 abbinamenti (p. 306) dei 66 possibili delle 12 osservazioni e determina che la distanza della stella dal centro della Terra, oscilla da 1/48 fino a 32 (32r) volte il raggio terrestre (detto semidiametro), quantità minore della distanza Terra-Luna, pari a 33r per Tolomeo (e per Chiaramonti) e per Copernico a 51r. Quindi conclude che la Nova si trova nel cielo sotto la Luna.

Galileo dapprima critica la distribuzione dei dati stessi ottenuti da Chiaramonti:

> SAGREDO: E ben mi parrà cosa più che miracolosa se, mentre in queste 12 sole indagini ce ne sono di quelle che rendono la stella vicino alla Terra a poche miglia, ed altre che per piccolissimo intervallo la rendono inferiore alla Luna, non se ne trovi alcuna che, a favor della parte avversa, la renda almanco per 20 braccia sopra l'orbe lunare (p. 308).

Segue una critica del metodo di Chiaramonti che vuole apparire estremamente preciso (fino ad 1/20 di miglio) in ogni risultato, quando poi questi differiscono di migliaia di miglia e quando la precisione deve essere relativa all'ordine di grandezza delle misure considerate, tenendo presente il grado di certezza delle supposizioni e soprattutto il fatto che l'errore "è certo":

> SALVIATI: ...sarebbe accettabile... quando *le supposizioni che noi pigliamo per vere fossero così certe, che ci assicurassero che noi fussimo per ritrarre in ultimo un'indubitabil verità*: ma qui voi vedete... [risultati] differenti di... migliaia di miglia: ora, mentre io sia più che sicuro che *quel ch'io cerco deve necessariamente differir dal giusto di centinaia di miglia*, a che proposito affannarsi nel calcolo, per la gelosia di non ismagliar d'un dito? (p. 321).
> SIMPLICIO: Talché, se le regole dependenti dall'aritmetica e dalla geometria son giuste, tutte le fallacie ed errori che s'incontrassero nel voler investigar tali altezze... convien che dependano dalla distanza... e dagli angoli... non ben misurati. E così tutte quelle diversità che si veggono in queste 12 indagini, dependono non da difetti delle regole de i calcoli, *ma da errori commessi nell'investigar tali angoli e tali distanze per mezo delle osservazioni instrumentali* (p. 311).
> SALVIATI: ...*In ciascuna combinazione delle osservazioni sia qualche errore*; il che credo sia assolutamente necessario; ...le osservazioni che servono per una indagine... fatte da diversi osservatori, in diversi luoghi e con diversi strumenti, chiunque abbia qualche cognizione di tal pratica dirà *non*

> *potere essere che... non sia caduto qualche errore*, e massime mentre noi veggiamo che *nel prender una sola altezza di polo, co'l medesimo strumento, nel medesimo luogo e dal medesimo osservatore, che l'ha potuta fare mille volte, tuttavia si va titubando di qualche minuto, e spesso anco di molti* (p. 314).

Così Galileo arriva alla conclusione che, nel corso di misurazioni strumentali, gli errori casuali sono inevitabili.

Successivamente Galileo apre l'importantissima questione di come valutare i valori osservati in modo da ottenere risultati attendibili; in altre parole, si chiede come devono essere considerati gli errori casuali.

Egli nota che, ripetendo più volte una misurazione, i piccoli errori sono molto più frequenti dei grandi; afferma cioè che è maggiore la probabilità di piccole deviazioni dal valore esatto, piuttosto che di deviazioni maggiori.

Per trovare l'esatto valore della misurazione, Galileo scarta tutte le misurazioni che forniscono risultati impossibili, i cui valori cioè differiscono di molto dalla maggioranza dei valori ottenuti, e considera solo questi ultimi, perché come Lui stesso afferma più volte, *il maggior numero delle misurazioni si concentra intorno al valore esatto*:

> SALVIATI: ...*De i luoghi dove collocar la stella nuova, alcuni sono manifestamente impossibili, ed altri possibili.* Impossibile assolutamente è che ella fusse per infinito intervallo superiore alle stelle fisse, perché un tal sito non è al mondo; quando fusse, la stella posta là a noi sarebbe stata invisibile; è anco impossibile che ella andasse serpendo sopra la superficie della Terra, e molto più che ella fusse dentro all'istesso globo terreno. Luoghi possibili sono questi, de' quali si è in controversia, non repugnando al nostro intelletto che un oggetto visibile, in aspetto di stella, potesse essere sopra la Luna, non meno che sotto.... dimodochè convien dire, *tutte le ossevazioni esser necessariamente fallaci* (p. 315).

Seguendo il filo del ragionamento, Galileo si chiede come si distribuiscono gli errori rispetto al valore vero:

> SALVIATI: ...E prima io vi domando, se gli astronomi nell'osservare con loro strumenti, e cercare, v. g., quanta sia l'elevazione di una stella sopra l'orizonte, *possono deviar dal vero tanto nel più quanto nel meno*, cioè ritrar con errore che ella sia talvolta più alta del vero e talvolta più bassa, o pure se *l'errore non può mai esser se non d'un genere, cioè che, errando, sempre pecchino nel soverchio e non mai nel meno, o sempre nel meno né già mai nel soverchio* (p. 316).
> SIMPLICIO: *Io non ho dubbio che sia egualmente pronto l'errare nell'uno che nell'altro modo* (p. 316).
> SALVIATI: ...Ora, di questi *due generi d'errori, che son contrarii e né quali possono essere egualmente incorsi gli osservatori della stella nuova*, applica-

> ti al calcolo, l'un genere renderà la stella più alta del vero, e l'altro più bassa: e perché già noi convenghiamo che *tutte le osservazioni son errate*, per qual ragione vuol quest'autore [Chiaramonti] che noi accettiamo per più congruenti co'l vero quelle che mostrano la stella essere stata vicina che l'altre che la mostrano soverchiamente lontana? (p. 316).

Qui e precedentemente Galilei ha chiaro in mente che la distribuzione degli errori ha un andamento simmetrico intorno al valore vero intorno al quale si distribuiscono il numero maggiore delle osservazioni effettuate.

> SALVIATI: ...e tra i luoghi possibili, *il vero sito conviene credere che fusse quello intorno al quale concorre numero maggiore delle distanze*... (p. 318).

Riguardo alla distanza della Nova, Galilei considera 5 altre coppie (p. 321) fra le stesse 12 osservazioni usate da Chiaramonti, scegliendo anche quelle ottenute dagli scienziati considerati da quest'ultimo *più esquisiti osservatori* (p.320). Da queste risulta che la stella è per molti semidiametri terrestri sopra la Luna (rispettivamente a distanza: 60r, 60r, 478r, 358r, 716r). La sua tesi viene corroborata dal fatto che, in generale, al fine di collocare la Nova tra le stelle fisse, occorrono correzioni certamente minori, se confrontate con le correzioni necessarie per collocare la stella più vicina. Questo è un problema di parallasse, cui va aggiunto che errori minori sono più probabili di grandi errori.

> SALVIATI: ...Queste, come vedete, son dunque indagini le quali rendon la stella assai superiore alla Luna: dove voglio che voi facciate considerazione sopra quel particolare che poco fa vi dissi, cioè che nelle distanze grandi la mutazione, o vogliam dire correzione, di pochissimi minuti, rimuove la stella per grandissimi spazi; come per esempio, nella prima di queste due indagini, dove il calcolo rese la stella 60 semidiametri remota dal centro, con la parallasse di 2 minuti, chi volesse sostenere che ella fusse nel firmamento, non ha a correger nelle osservazioni altro che 2 minuti e anco meno, perché allora cessa la parallasse, o diviene così piccola che rende la stella in lontananza immensa, quale si riceve da tutti esser quella del firmamento. Nella seconda indagine l'emenda di manco 4 m. p. fa l'istesso. Nella terza e nella quarta, pur come nella prima...
>
> Ma non così avverrà nelle altezze sublunari: imperocché figuratevi pure qual lontananza più vi piace, e fate prova di voler corregger le indagini fatte dall'autore ed aggiustarle sì che tutte rispondano nella medesima determinata lontananza; voi vedrete quanto maggiori emende vi bisognerà fare. (p. 327).
>
> SALVIATI:... e perché (sì come siam convenuti) *è da credere che gli osservatori abbiano errato più presto di poco che d'assai*, manifesta cosa è che le correzioni da applicarsi all'osservazione che danno la stella alta in infinito, nel ritrarla a basso, primo e con emenda minore la condurranno nel firmamento che sotto la Luna: *talché tutte queste applaudono all'opinione di quelli che la mettono tra le stelle fisse* (p. 336).

> ...Potete comprendere quanto questa prima maniera d'investigar la distanza della stella e provarla sublunare, introdotta dall'autore, sia disfavorevole per la causa sua e quanto più *probabilmente* e chiaramente si raccolga, la lontananza di quella essere stata tra le più remote stelle fisse. (p.337).

Infine, dopo che Salviati ha demolito tutte le argomentazioni di Chiaramonti, sostenute da Simplicio, che davano ragione ad Aristotele collocando la stella Nova nell'unico luogo ove erano considerati possibili dei cambiamenti, cioè nel cielo sotto la luna, Sagreto conclude in maniera sottile ed arguta con una metafora riferita a Chiaramonti:

> SAGREDO: Mi par di vedere quell'infelice agricoltore, che dopo l'essergli state battute e destrutte dalla tempesta tutte le sue aspettate ricolte, va con faccia languida e china raggranellando reliquie così tenui, che non son per bastargli a nutrir né anco un pulcino per un sol giorno (p. 346).

Ma Galilei vuole stemperare la sua critica ad Aristotele e rivolgerla maggiormente contro i suoi seguaci. E così, parlando della questione e dell'errore più importante di Aristotele, e cioè l'aver collocato la Terra al centro *de li celesti movimenti,* si dimostra sicuro che questo grande filosofo avrebbe cambiato idea di fronte ad *evidentissime esperienze,* al contrario dei Peripatetici:

> SALVIATI: Non domando de i Peripatetici, domando d'Aristotele medesimo; chè quanto a quelli so benissimo ciò che risponderebbero. Essi, come reverentissimi ed umilissimi mancipii d'Aristotile, negherebbero tutte le esperienze e tutte le osservazioni del mondo, e recuserebbero anco di vederle, per non le avere a confessare, e direbbero che il mondo sta come scrisse Aristotile, e non come vuol la natura; perché, toltogli l'appoggio di quell'autorità, con che vorreste che comparissero in campo?... (p. 348).

CONCLUSIONI CHE INTERESSANO IL CALCOLO DELLE PROBABILITA': Galilei osserva che nelle misurazioni strumentali (quando si sommano componenti (aleatorie) diverse, mentre ciascuna può assumere valori differenti: luoghi e momenti di effettuazione delle misure, temperature, perizia degli osservatori, etc.), a proposito della distribuzione dei valori ottenuti, si verifica che:

- — gli errori sono inevitabili;
- — tali errori sono distribuiti simmetricamente;
- — gli errori piccoli sono più probabili di quelli grandi;
- — conviene prendere la misurazione intorno alla quale concorre il numero massimo di misurazioni.

Così Galilei, a proposito degli errori strumentali, anticipa qualitativamente di circa 200 anni le "conclusioni"[13] generali di Gauss[14] circa la "Legge di frequenza degli errori". Questa viene espressa con una densità di probabilità che viene detta anche "a campana" o, più propriamente, "Gaussiana" o "Normale". Si ritiene utile dare in appendice, qualche informazione storica, scientifica e didattica su questa distribuzione.

Dalle proprietà indicate deriva l'esistenza della probabilità massima in corrispondenza della media aritmetica dei valori considerati. Questa proprietà e quella della simmetria della distribuzione, non sono intrinseche alla distribuzione degli errori, ma coincidono con le ipotesi che verranno imposte da Gauss per stabilire, in generale, che la distribuzione degli errori segue la "legge normale".[15] Tale densità di probabilità risulta positiva e simmetrica su tutta la retta reale. Ma considerare queste ultime proprietà valide in generale, porta a dei paradossi, analizzati e risolti da Galilei in quanto segue.

Scritture concernenti il quesito in proposito della stima di un cavallo[16]

CONTESTO E PROBLEMA: in data 24 aprile 1627 il gentiluomo fiorentino Andrea Gerini pone a Tolomeo Nozzolini,[17] pievano di S.Agata in Mugello, il seguente quesito:

> Un cavallo vale veramente 100 scudi: da uno è stimato 1000 scudi e da un altro 10 scudi: si domanda chi abbia di loro stimato meglio e chi abbia fatto manco stravaganza nello stimare (p. 565).

Si trattava di una questione discussa in una brigata di gentiluomini fiorentini, che andarono a porre il quesito anche a Galilei, prima di mostrargli la risposta del Nozzolini, il quale giudicava assai peggiore la stima di 1000 scudi. Scrive Nozzolini:

---

[13] Gauss ricavò la legge *imponendo* alla densità di probabilità di assumere il valore massimo in corrispondenza della media aritmetica della frequenza relativa. Fu Laplace che poco più tardi (1810; l'impostazione risale al 1780) mise in luce la proprietà che caratterizza la legge normale: *se* X\s(;1), X\s(;2)... X\s(;n) *sono numeri aleatori indipendenti, la loro somma* X=X\s(;1)+X\s(;2)+...+X\s(;n) *segue la legge normale con approssimazione tanto maggiore quanto più il contributo di ogni singolo degli addendi è "trascurabile" rispetto alla somma.*

[14] Gauss K. F., *Theoria motus corporum coelestium*, in *Werke*, vol.7, K. Gesellschaft Wissenschaft Göttingen, 1809.

[15] Si veda l'appendice.

[16] Galei G., E.N., vol. VI, p. 565-612. Si tratta di una lettera, scritta nel 1627 e pubblicata per la prima volta nel 1718.

[17] Si fa riferimento allo stesso Nozzolini che aveva già avuto una controversia con Galileo a proposito delle "cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono".

> A questo, così ad un tratto, risponderei che se quel primo si discosta dal giusto per 900, e quel secondo per 90, chi non vede che il primo commette dieci volte maggior stravaganza che il secondo? (p. 569)

Dunque Nozzolini giudica peggiore la stima di 1000 scudi perchè la differenza (1000-100=900) è maggiore di (100-10=90), anzi è ben dieci volte più grande.

Questa argomentazione può essere considerata valida, nel problema posto e in generale?

ARGOMENTO: Galilei, inizialmente d'accordo con la tesi del Nozzolini, riflette sul problema, afferma che non debbono essere considerati i valori assoluti degli errori ma quelli relativi, critica l'uso della media aritmetica mettendo in evidenza i paradossi che possono derivarne e approfondisce l'uso della media geometrica e con questa, risolve il problema.

Nella prima risposta *in voce* di Galilei (p. 583) *io corse subito a giudicare più esorbitante la stima dei 1000, come quella alla quale seguiva molto maggiore danno e perdita.*

Ma riflettendo meglio sulla questione, Galilei si rende conto che occorre considerare come misura della *stravaganza* l'errore relativo e non quello assoluto.

L'insistenza del Nozzolini nel difendere la sua tesi, costringe Galilei ad un approfondimento concettuale, che è poi il suo contributo alla teoria degli errori e alla definizione generale di media.

> Stimerà giusto e bene quello che stima cento la cosa che giustamente vale cento; devieranno dalla giusta stima e stravaganteranno quelli che la stimeranno più o meno del giusto: e di questi colui commetterà la maggior stravaganza, che poi esorbitantemente dal giusto prezzo, o nel più o nel meno, devierà.
>
> E perchè parrà forse ad alcuno che *deviare egualmente dal giusto nel più e nel meno possa intendersi in due modi*, cioè o in *proporzione aritmetica* che è quando l'eccesso del più sopra 'l giusto è uguale all'eccesso del giusto sopra la minore stima; come se il giusto sia dieci e l'una stima sia 12 e l'altra 8, dove le differenze sono eguali, cioè 2), o in *proporzione geometrica* (che è quando la maggior stima al giusto ha la medesima proporzione che il giusto alla minore; che sarebbe quando uno stimasse 20 quello che vale 10 e l'altro lo stimasse 5, dove l'uno stima il doppio più e l'altro la metà meno), e che così, in conseguenza, deviar più dal giusto s'intenda quando, nel primo modo, l'uno eccesso sia maggiore dell'altro e, nel secondo, la maggiore delle due stime riguardi il giusto con maggiore proporzione di quella che avesse il giusto alla minore stima; *è necessario stabilire in quale delle due maniere* si debba intendere nel presente caso (pag. 572).

Quindi Galilei considera che si può stimare l'errore in proporzione aritmetica (errore assoluto) o in proporzione geometrica (errore relativo) e prosegue:

> Le deviazioni dunque delle stime dal giusto *si devono giudicare secondo la proporzione geometrica*: e così quello che stima una roba la centesima parte di quello che ella vale, è assai più esorbitante stimatore di quella che la stima il doppio o di più; ed in conseguenza *egualmente deviano dal giusto quelli due che stimano, uno il doppio di più e l'altro la metà meno, uno il decuplo del giusto, e l'altro la decima parte solamente.*

Dunque Galileo giudica le due stime del cavallo ugualmente "stravaganti" perchè 1000/100=100/10 e dunque hanno lo stesso errore relativo.

In uno scritto successivo Galileo precisa (p. 588):

> Misura atta a misurare una stravaganza è una stravaganza, e non uno scudo, una libbra, una canna.... non si possono giudicare in modo alcuno le stravaganze delle stime senza la relazione di quelle al giusto valore della cosa stimata. (p. 589) ...possiamo concludere che, la misura delle esorbitanze non essere quella medesima che misura le cose, ma essere in astratto una general relazione ed abitudine che ha la stima falsa verso il vero valore delle cose stimate; (p. 591).

Come sempre Galileo conduce questa sua polemica con arguto brio mettendo in crisi il concetto di media aritmetica, come "media" per eccellenza, attraverso una considerazione molto convincente:

> ...*la deviazione della vera stima deve essere regolata non dalla proporzione aritmetica, ma dalla geometrica*: dove ora, se egli vorrà persistere nella medesima opinione, bisognerà sostenere infinite cose lontanissime da ogni ragionevol discorso... Ma più bisogna che il Sig. Nozzolini dica che colui che stima Montemorello essere alto braccia *10000*, sia più esorbitante stimatore di un altro che *dicesse che al suo giudizio è non solamente alto punto, ma è una laguna o voragine profonda 100 braccia*; il che accadrebbe quando si trovasse che la vera altezza del monte fosse un palmo meno di 5100 braccia, dal qual numero lo stimatore del 10000 s'allontana 4900 braccia e un palmo, e l'altro 4900 braccia meno un palmo (p. 592).

Sostanzialmente[18] Galilei afferma che se un monte è alto 5000 piedi, può accadere che l'altezza venga valutata 11000 piedi, con un errore per eccesso di 6000 piedi, ma certo non si potrà sbagliare, sempre di 6000 piedi, ora per difetto, con una stima che valuti la l'altezza del monte pari -1000 piedi, come se questo fosse una *voragine*.

---

[18] Poiché la misura di un palmo è sicuramente minore di quella di un braccio, possiamo dire che qui Galilei ha commesso un piccolo errore aritmetico: doveva dire che Montemorello è alto effettivamente 4950 braccia e che tale valore ha la stessa differenza di 5050 braccia, sia da 10000, che da -100 braccia. Ma il significato di quello che vuole dire è chiarissimo.

CONCLUSIONI: Galilei sostanzialmente afferma che la distribuzione degli errori non può essere considerata, in generale, simmetrica con errori grandi quanto si vuole, perché questo porterebbe al paradosso di ritenere ugualmente errate le stime per eccesso e per difetto con lo stesso valore assoluto dell'errore, grande a piacere.[19] Se questo fosse vero, data un qualsiasi valore positivo da stimare, nel caso in cui l'entità dell'errore superi il valore stesso, verrebbe considerata ammissibile una stima, per il valore positivo considerato, espressa da una quantità negativa. In particolare ad esempio, per l'altezza di un monte alto 1000 metri possiamo accettare che l'altezza venga valutata 3000 metri, ma certo non -1000. Sarebbe assurdo. Anche se è vero che entrambi gli stimatori commettono un *errore assoluto* di 2000 metri e anche se, dalla *media aritmetica* di 3000 e -1000, ritroviamo la misura di 1000 metri del monte. In casi del genere devono essere considerate equivalenti, ad esempio, una stima con un valore doppio (2000 m) dell'altezza del monte, ed una stima che lo valuta la metà (500 m). Gli errori assoluti (1000 e 500) risultano così differenti, ma coincidono gli *errori relativi* perché 2000 è più grande di 1000, allo stesso modo di come 1000 è più grande di 500.

Infine, soltanto attraverso la *media geometrica* delle due stime considerate si ritrova l'altezza reale del monte. Infatti: $\sqrt{2000.500} = 1000$.

APPENDICI

Ipotesi storica e spiegazione didattica

Si formula qui una *ipotesi* su come Galilei abbia potuto eventualmente individuare il "nodo concettuale" che porta a comprendere il motivo per il quale la distribuzione degli errori si presenta con un andamento "a campana". Tale ipotesi potrebbe spiegare sia le premesse che hanno dato la possibilità a Galilei di esprimersi, come abbiamo visto, in modo estremamente puntuale sull'argomento, sia come mai questo sia potuto avvenire tanto in anticipo rispetto a tutti quelli che hanno affrontato la questione.

IPOTESI: Galilei nel risolvere in modo combinatorico il problema della distribuzione di probabilità per le possibili somme con tre dadi, ha affermato esplicitamente e praticamente che sommando tre dadi, *i valori centrali si ottengono in un numero maggiore di modi*. Questa semplice spiegazione risulta assolutamente centrale e generale, sia nel caso in cui le variabili aleatorie assumano valori discreti, sia nel caso in cui le loro variazioni appartengano ad un intervallo. E questo modo di comprendere la sostanza del problema non può essere desunto dalle dimostrazioni attuali del Teore-

[19] Sono proprio queste alcune caratteristiche della distribuzione degli errori gaussiana.

ma del Limite Centrale, che vengono effettuate attraverso strumenti matematici molto complessi e poco “trasparenti”.

Indipendentemente dalla validità storica dell’ipotesi formulata che non ha alcuna necessità, perchè Galilei potrebbe essersi limitato ad osservare i risulttati delle misure effettuate, la spiegazione ivi compresa permette di capire sostanzialmente perché, quando vengono fatte delle misurazioni in relazione ad una grandezza che risulta la somma di “molte” componenti aleatorie, l’andamento di tali misurazioni risulta “a campana”. Cioè perché, ad esempio, misurando le altezze delle persone in una popolazione omogenea, accada che per un’ altezza intermedia si determina una percentuale alta, mentre si ottengono delle percentuali minori per altezze inferiori o superiori, con un andamento, appunto, “a campana”; ed ugualmente perché questa distribuzione si ottenga, misurando, ad esempio, con un metro da sarto la lunghezza di un salone. Ogni volta che si pone un segno sul pavimento, per ripartire da questo con il metro per la nuova misurazione, si commette un piccolo errore, ma, se non ci sono errori sistematici, la misurazione finale che si ottiene sarà esatta, o poco differente dalla misura vera, con maggiore frequenza, perché gli errori tenderanno a compensarsi attraverso quelli simmetrici o mediante quelli di segno opposto che hanno per somma lo stesso valore assoluto. Perché insomma i valori centrali si ottengono in un numero maggiore di modi.

Informazioni sulla curva normale

La distribuzione Gaussiana costituisce uno dei fondamenti principali del Calcolo delle Probabilità. Storicamente, il fatto che una curva “a campana” comparisse tanto frequentemente negli istogrammi delle misurazioni, e che ciò avvenisse in occasioni molto differenti, sembra fosse stata data come prova dell’esistenza di Dio: la frequenza e la regolarità dell’andamento, in mancanza di altre spiegazioni, veniva attribuita ad una volontà immanente.

A proposito di questa curva conviene riportare il pensiero di tre autori:

Francis Galton:[20]

> Difficilmente saprei indicare cosa alcuna altrettanto adatta a colpire l’immaginazione quanto la meravigliosa forma dell’ordine cosmico espressa dalla ‘Legge di frequenza degli errori’.
>
> Questa legge sarebbe stata personificata dai Greci, e deificata, se ne avessero avuto conoscenza.
>
> Essa regna con serenità ed in completa indifferenza tra la confusione più

[20] Galton F., “Order in Apparent Chaos”, *Natural Inheritance*, n.39, adattato da “President’s Address” in *Journal of Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 15, 1886, pp. 489-499.

selvaggia. Più è immensa la folla più è grande l'apparente anarchia, e più è perfetto il suo governo. E' la suprema legge dell'Assenza di Ragione. Ogni qualvolta un grande campione di elementi caotici viene preso in mano e disposto in ordine di grandezza, una insospettata e più bella forma di regolarità mostra di essere stata ivi latente. Le teste della riga ordinata formano una curva che scorre con proporzioni invariabili, ed ogni elemento quando viene messo a posto, trova, come se così fosse, una nicchia predisposta, accuratamente preparata a contenerlo.

Jules-Henri Poincaré[21]:

> Tutti vi credono fermamente [in questa curva], ...perché i matematici si immaginano che sia un fatto di osservazione, e gli osservatori un fatto di matematica.

Bruno de Finetti[22]:

> La "legge normale" è quella che caratterizza una forma particolarmente notevole di distribuzione, e che ha un'importanza ben nota (forse anche sopravalutata) nel calcolo delle probabilità, nella statistica, nella teoria degli errori d'osservazione. Fu quest'ultima teoria a produrre per la prima volta tale legge, e fu precisamente il Gauss (1809) che, convinto dell'esistenza di una legge tipica degli errori accidentali, e cercando quindi quale ne debba essere la forma, e cioè quale sia la probabilità $\varphi(x)\,dx$ di commettere un errore compreso tra x e $x+dx$ nella misura di una grandezza fisica, dedusse la seguente espressione della funzione

$$\varphi(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}$$

[21] Poincaré J. H., *La science et l'hypothèse*, cap.VIII, paragrafo dedicato alla termodinamica; la frase è attribuita ad un fisico, Paris, Flammarion, 1902.

[22] de Finetti B., "Come giustificare elementarmente la 'Legge Normale' della probabilità", *Periodico di Matematiche*, 1934, p. 3-16, ripubblicato nella rivista *Archimede* (Agosto 1990). Bruno de Finetti (1906-1985) è stato uno dei più alti esponenti della cultura matematica e del pensiero filosofico del XX secolo e in particolare uno dei più grandi esponenti del Calcolo delle Probabilità. Permettete a chi scrive di riportare due citazioni e qualche informazione, a proposito del suo più grande maestro: "Il pensatore italiano che più mi ha influenzato è Bruno de Finetti, dopo di lui colloco Giovan Battista Vico", R. Nozich (filosofo); "*Teoria delle probabilità* [Einaudi 1970] di Bruno de Finetti è destinato sicuramente ad essere riconosciuto come uno dei grandi libri del mondo", D. Lindley (matematico). Tali riconoscimenti ad esempio hanno portato a considerare Bruno de Finetti, da alcuni anni, una fonte privilegiata per i più diffusi manuali di "Management" e di "Statistica applicata" della "Harvard School of Administration" e ad istituire, dal 1995, un premio scientifico annuale in suo onore da parte dell'European Association for Decision Making. Infine Franco Modigliani, quando fu intervistato in occasione del Premio Nobel per l'Economia, menzionò il nome di altri due italiani che avrebbero meritato il premio: il primo fu quello di Bruno de Finetti.

De Finetti prosegue dicendo che il fatto che si abbia probabilità massima in corrispondenza della *media aritmetica*, non è una proprietà intrinseca della distribuzione degli errori, ma *è stato imposto* da Gauss, per derivare che la distribuzione degli errori segue la legge normale φ(x). Tale critica è abbastanza simile a quella di Galilei, che anzi la avvalora rilevandone le conseguenze paradossali, come abbiamo visto.

> In sostanza il ragionamento [di Gauss] non dice che, date certe premesse più o meno accettabili e intuitive, si deve concludere che la legge di probabilità risulta quella "normale", ma invece che, per giustificare in modo assoluto l'uso dei pratici di basarsi sulla media aritmetica, bisogna imporre alla legge di probabilità di avere la forma gaussiana...

Infatti, imponendo la *simmetria* circolare per due variabili aleatorie indipendenti si ha necessariamente:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x^2+y^2)$$

che è una equazione funzionale che ammette unicamente soluzioni del tipo:

$$\varphi(x)=\varphi(0)e^{-cx^2}$$