

GALILEO E ARCHIMEDE

Silvio Maracchia

Si legge nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* un elogio ad Archimede ed ai suoi scritti “*da me con infinito stupore letti e studiati*”.¹ Non c'è dubbio, infatti, che Galileo conoscesse assai bene questi scritti e si sentisse molto vicino allo spirito del grande matematico di Siracusa. Galileo in effetti cita molte volte Archimede e ne ha una grande considerazione, né, penso, sarebbe potuto essere diversamente dato che erano state proprio le opere di Archimede a riportare in Occidente quella che possiamo considerare la grande matematica greca e che erano il passaggio obbligato dello studio superiore all'epoca di Galileo. Questo è dimostrato indirettamente da tutti i matematici che avevano preceduto Galileo di almeno un secolo e dai matematici a lui contemporanei.

Possiamo dire, in altre parole, che l'aria matematica che si respirava durante la rinascita della matematica in Occidente era un'aria archimedea. Euclide aveva naturalmente contribuito al ritorno della matematica vera formandone di nuovo basi solide e sicure, ma chi ha portato i matematici ad un livello superiore preparandoli a sviluppi successivi, come oggi possiamo constatare, sono state proprio le opere di Archimede così piene di spunti e di intuizioni.

In quest'aria così rarefatta si trova anche Galileo, nato poco più di un secolo dopo il vero rientro delle opere di Archimede e si trova nella generazione di matematici che si applicano non solo alla semplice comprensione delle sue opere ma piuttosto al suo proseguimento.

¹ Galileo Galilei, *Opere*, Salani, Firenze, 1964, vol. IV, p. 177.

Quello che veramente avvicina i due scienziati è l'uso che entrambi fecero della matematica per la spiegazione di fenomeni fisici: maggiormente matematico Archimede, maggiormente fisico Galileo. Entrambi cercarono di spiegare in forma quantitativa circostanze naturali nonostante che Aristotele, ben noto a tutti e due, avesse espresso dei dubbi sulla possibilità di applicare una scienza razionale e precisa qual è la matematica, a fenomeni reali.²

Possiamo pensare che entrambi seguissero l'idea pitagorica di un universo scritto in linguaggio matematico e si applicassero per strappare alla natura i suoi segreti proprio con l'unica chiave che può consentire di aprire la porta del "cosmo" che nel significato pitagorico sta per "universo" ma anche per "ordine".

Nella presente comunicazione osserveremo due soli risultati di Galileo che si avvicinano a quelli già ottenuti da Archimede: un problema di massimo e minimo e la quadratura della parabola.

Problema di massimo e minimo

Uno dei grandi problemi, trattato da tutti i matematici dell'Antichità e ripreso successivamente sino ai giorni nostri, è quello della maggiore "convenienza" delle figure piane e dei corpi in relazione alla loro "regolarità".

Ad esempio, a parità di perimetro, tra tutti i triangoli, quello equilatero ha superficie massima (inversamente, a parità di superficie ha perimetro minimo); la stessa cosa vale per i quadrilateri e, in generale, per i poligoni. In altre parole più le figure piane (e le solide) tendono alla regolarità e più si avvicinano a proprietà legate a massimi e minimi. Se poi consideriamo figure regolari (al solito, piane e solide) accade anche che, a parità di perimetro, o di superficie nel caso di un solido, aumenta la superficie o il volume, con l'aumentare del numero dei lati o delle facce.

Queste sensazioni di carattere più estetico che matematico le troviamo in effetti dimostrate nel corso di vari secoli dello sviluppo matematico con procedimenti assai diversi. Ad esempio nell'opera *Sugli isoperimetri* di Zenodoro (vissuto tra il 1° sec. a. C. e il 2° d. C.) si dimostra che "*tra le figure rettilinee ordinarie, che hanno lo stesso perimetro, sono maggiori quelle equilatero ed equiangole e quelle che hanno più angoli*" (prop. 1).³

² Cfr. Aristotele, *Metafisica*, 1025b 2; *De Caelo*, 299a 15.

³ Ad un certo punto nell'applicazione pratica e successivamente nella teoria matematica, dovette imporsi il problema dell'esame delle figure isoperimetriche. Possiamo dedurre questo dalle parole che Proclo pone nel suo commento alla proposizione IV di Euclide (cfr. *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, Friedlein, 236): "*Capita tuttavia in alcuni triangoli che pur essendo uguali le aree, siano diseguali i perimetri; o che, pur essendo uguali i perimetri, siano diseguali le aree (...) ed è appunto qui che alcuni hanno frodato i loro associati nella spartizione delle terre e si sono presa l'area più grande fondandosi sull'eguaglianza del perimetro*".

Tutto ciò porta ad ipotizzare di poter dimostrare che il cerchio abbia superficie massima tra tutte le figure rettilinee isoperimetriche (Zenodoro, prop. 3) e analogamente per il volume della sfera nei confronti dei poliedri con uguale superficie (Zenodoro propp. 12-14).

D'altra parte già Archimede aveva dimostrato (*Sulla sfera e cilindro*, II, prop. 9) che "Tra tutti i segmenti sferici di uguale superficie è massimo l'emisfero".

Ebbene, anche Galileo entra nell'argomento dei massimi e minimi e dimostra:⁴

- (1) Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivogliano due poligoni regolari tra di loro simili, de i quali uno gli sia circoscritto e l'altro gli sia isoperimetrico;
- (2) In oltre, essendo egli minore di tutti i [poligoni] circoscritti, è all'incontro massimo di tutti gli isoperimetrici;
- (3) De i medesimi poi circoscritti, quelli che hanno più angoli sono minori di quelli che ne hanno manco; ma all'incontro de gl'isoperimetrici quelli di più angoli son maggiori.

Per dimostrare questo, Galileo si serve implicitamente di alcuni risultati di Euclide che mettiamo in evidenza ed anche, ecco un altro contatto con Archimede, di una proposizione tratta dalla *Misura del cerchio*.

PREMESSE

- (a) Euclide, *Elementi*, def. IX del V libro: "Quando tre grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la terza rapporto duplicato rispetto a quello che ha con la seconda".

In altre parole, se

$$a : b = b : c$$

allora

$$a : c = \text{dupl.}(a : b)$$

e viceversa.

Si tenga presente che con $\text{dupl.}(a : b)$ si intende $a^2 : b^2$; infatti dalla proporzione continua data $a/b = b/c$, moltiplicando i due membri per a/b si ha appunto $a^2 : b^2 = a : c$.

⁴ *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata prima, *Opere cit.*, vol. IV p. 197.

Si noti infine che se

$$a : b = e : f$$

Allora

$$\text{dupl. } (a : b) = \text{dupl. } (e : f);$$

- (b) Euclide, *Elementi*, VI, 1: “Due triangoli di uguale altezza stanno tra loro come le rispettive basi”;
- (c) Euclide, *Elementi* VI, 20: “Due poligoni simili stanno tra loro in ragione duplicata di due lati omologhi”.

In altre parole, detti F ed F' due poligoni simili ed a, a' due lati omologhi (a in F ed a' in F'), si ha:

$$F : F' = \text{dupl. } (a : a');$$

- (d) Archimede, *Misura del cerchio*, 1: “Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [sc. all'altro cateto]”.

LE PROPRIETÀ DI GALILEO

Per la (1) bisogna dimostrare che, detto P_1 il poligono regolare circoscritto al cerchi K e P_2 quello di ugual numero di lati, anch'esso regolare, con perimetro p_2 uguale alla circonferenza di K, si ha (fig. 1):⁵

$$P_1 : K = K : P_2$$

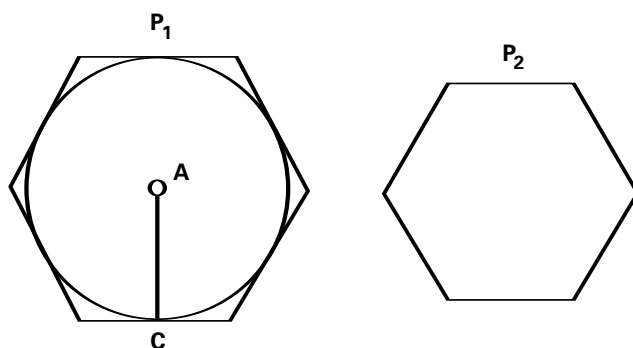


Fig. 1

⁵ La figura 1 e le successive figure 2 e 3 sono di Galileo.

P_I è equivalente al triangolo avente per base il suo perimetro p_I e per altezza l'apotema AC , mentre per la premessa (d) il cerchio è equivalente al triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio AC (fig. 2).

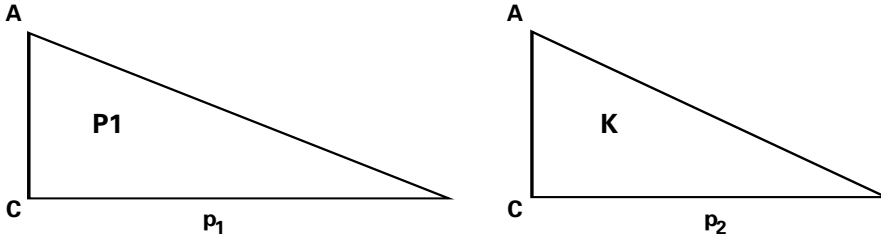


Fig. 2

Per la premessa (b) si ha dunque:

$$P_I : K = p_I : p_2 (*)$$

Ma P_I e P_2 sono simili pertanto, per la (c):

$$P_I : P_2 = \text{dupl.}(p_I : p_2) (**)$$

E per la premessa (a), confrontando (*) e (**), si ha:

$$P_I : P_2 = \text{dupl.}(P_I : K),$$

cioè, sempre per la premessa (a):

$$P_I : K = K : P_2 \text{ c. d. d. (***)}$$

Per dimostrare la (2), cioè il secondo risultato di Galileo, basta osservare, dalla (***) ottenuta che, essendo $P_I > K$, si ha, di conseguenza $K > P_2$ cioè *ogni cerchio è maggiore di qualsiasi poligono isoperimetrico*, c. d. d.

Per dimostrare, infine, la (3), Galileo considera il cerchio di centro O e raggio OA e sulla tangente in A alla circonferenza riporta $AC = l_7/2$ (fig. 3)⁶

⁶ Con l_7 si intende il lato dell'ettagono regolare circoscritto, così come, successivamente, con l_5 quello del pentagono regolare circoscritto.

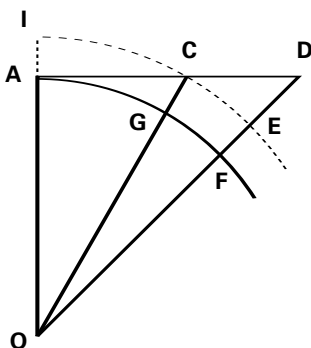


Fig. 3

e $AD = l_3/2$. Seguono pertanto, tra triangoli e settori, considerando anche l'arco concentrico di raggio AC , le relazioni:

$$(\text{triang.})DOC > (\text{sett.})EOC$$

$$(\text{sett.})COI > (\text{triang.})COA$$

Da cui

$$(\text{triang.})DOC : (\text{triang.})COA > (\text{sett.})EOC : (\text{sett.})COI = \\ (\text{sett.})FOG : (\text{sett.})GOA$$

permutando e componendo, dalla diseuguaglianza tra il primo e terzo membro, si ottiene:

$$(\text{triang.})DOA : (\text{sett.})FOA > (\text{triang.})COA : (\text{sett.})GOA$$

e quindi

$$10 (\text{triang.})DOA : 10 (\text{sett.})FOA > 14 (\text{triang.})COA : 14 (\text{sett.})GOA$$

cioè

$$\text{Pentag. Circosc.} : \text{Cerchio} > \text{Ettag. Circosc.} : \text{Cerchio}$$

da cui segue che:

$$\text{Pentagono circosc.} > \text{Ettagono circosc.} \quad (^\circ)$$

Dalla (1) segue però

$$\text{Pentag.circ.:K=K: Pentag.isoper.} \quad (^\circ)$$

$$\text{Ettag. circ.:K=K: Ettag.isoper.}$$

Dalle ($^\circ$) e ($^\circ$) segue, infine

$$\text{Pentag. isoper.} < \text{Ettag. isoper.} \\ \text{c.d.d.}$$

Quadratura della parabola

Un segmento parabolico S è uguale ai $\frac{4}{3}$ del triangolo massimo inscritto (fig. 4) e questo consente la sua quadratura (“quadratura della parabola”).

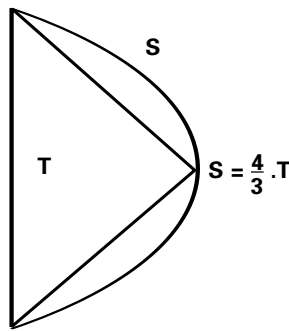


Fig. 4

Questo problema è stato risolto da Archimede tre volte: le prime due si trovano nella *Quadratura della parabola* (propp. 17^a e 24^a) e la terza nel *Metodo* (opera ignota sino al 1906). Galileo lo risolve ricorrendo ad alcune disequaglianze che Archimede mostra nel corollario alla prop. 10 delle *Spirali*:⁷

$$1) \quad n(nd)^2 < 3 \{d^2 + (2d)^2 + \dots + [(n-1)d]^2 + (nd)^2\};$$

$$2) \quad n(nd)^2 > 3 \{d^2 + (2d)^2 + \dots + [(n-1)d]^2 \}$$

⁷ Galileo, *Discorsi e dimostrazioni matematiche...* Giornata seconda, *Opere cit.* IV, p. 306 sgg. La proprietà, trentadue anni prima di Galileo, era stata affrontata già da Luca Valerio che le dedica la sua ultima opera (*Quadratura parabolae per simplex falsum et altera quam secunda Archimedia expeditur*, 1606) e da Cavalieri nella prima proposizione del libro IV della sua *Geometria degli Indivisibili* (1635) e successivamente da Torricelli che la ottiene in ben 21 modi diversi (in *Opera Geometrica*, 1644).

Con tali disequaglianze Galileo, se indichiamo con T il rettangolo $ACBP$ e con m_1 la parte di questo rettangolo che non appartiene alla metà BCA del segmento parabolico (v. fig.5), dimostra la proprietà:

$$m_1 = 1/3 ACBP = 1/3 T. (^)$$

Una volta ottenuta questa dimostrazione, che vedremo tra poco, si ottiene, con i simboli indicati dalla figura:

$$S_1 = \text{Triang.}ABP - m_1 = T/2 - m_1$$

$$2S_1 = T - 2m_1$$

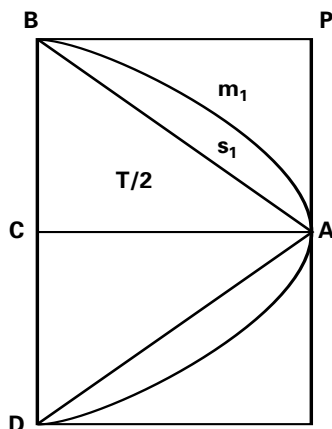


Fig. 5

Pertanto, per il segmento parabolico S si ottiene la famosa relazione

$$\begin{aligned} S &= 2 S_1 + T = T - 2m_1 + T = 2T - 2m_1 = \\ &= 2T - 2 (1/3 \cdot ACBP) = 2T - 2/3 \cdot T = 4/3 \cdot T.^8 \end{aligned}$$

Dimostrazione delle proprietà di Galileo.

Nella dimostrazione, a parte l'uso esplicito di un risultato di Archimede, si può notare che il procedimento stesso è di tipo archimedeo, sia per una tec-

⁸ T è sia il rettangolo $ACBP$ che il triangolo ABD . I passaggi di Galileo si potrebbero ridurre ma non è questo che qui interessa.

nica dimostrativa sul tipo di quella “per esaurione” e sia per i mezzi usati nella dimostrazione stessa.

Galileo, volendo dimostrare che la figura mistilinea BAP (quella che in precedenza abbiamo indicato con m_1) è uguale ad $1/3$ del rettangolo ACBP (v. fig. 6),⁹ comincia a supporre che ciò non sia vero per arrivare ad un assurdo.

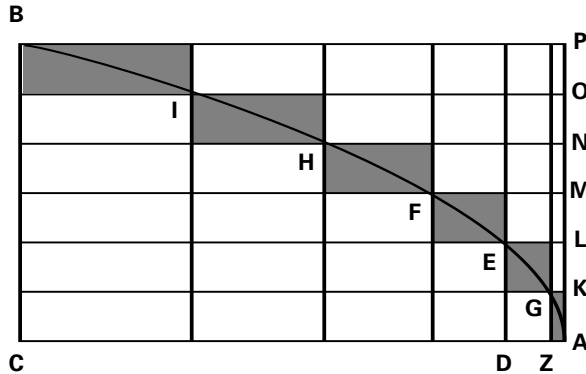


Fig. 6

Sia, se possibile $BAP < 1/3 ACBP$ ¹⁰

In tal caso sia X la superficie tale che risulti (fig. 7)



Fig. 7

$$BAP + X = 1/3 \cdot ACBP$$

Si divida BC in n parti uguali in modo che (Eucl. *Elem.* X,1) ciascuno dei rettangoli che si vengono a determinare, ad esempio BO sia minore di X.

La figura circoscritta a BAP [somma dei rettangoli: BO + IN + HM + FL + + EK + GA] supera BAP di una grandezza minore di BI + IH + HF + FE + + EG + GA = BO < X, cioè:

$$\text{Fig. circoscr.} - BAP < BO < X$$

e dunque,

⁹ Tale figura è la stessa che si trova nell’opera di Galileo e così la seguente figura 7.

¹⁰ Con BAP si intenderà sempre la figura mistilinea (prima indicata con m_1) che aggiunga alla metà del segmento parabolico forma il rettangolo ACBP.

Fig. circoscr. < BAP + X = 1/3 · ACBP. (^)

Galileo fa vedere ora che risulterà contemporaneamente anche

Fig. circoscr. > 1/3 · ACBP

raggiungendo così l'assurdo.

Infatti per la proprietà della parabola che Galileo conosce dalle opere di Archimede o da quella di Apollonio, si ha detto k il parametro (fig. 8):

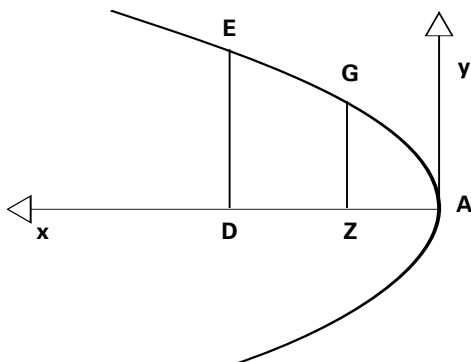


Fig. 8

$$ED^2 = k \cdot AD \quad \text{**}$$

$$GZ^2 = K \cdot AZ$$

E, pertanto:

$$\frac{ED^2}{GZ^2} = \frac{AD}{AZ}$$

Ritornando alla figura 6 di Galileo, si ha dunque:

$$DE^2 : ZG^2 = AD : AZ = EL : AZ = EL \cdot LK : AZ \cdot LK$$

ossia

$$DE^2 : ZG^2 = \text{rett.}(KE) : \text{rett.}(KZ)$$

** Questa proprietà della parabola si intende immediatamente pensando alla sua equazione cartesiana $y^2 = kx$ ponendo gli assi coordinati e precisamente l'asse x coincidente con la retta AZ e diretto da A a Z e come asse y la tangente in A alla curva e diretto concordemente con il verso da Z a G .

e, finalmente (analogamente per le ulteriori relazioni):¹²

$$AL^2 : AK^2 = \text{rett.}(KE) : \text{rett.}(KZ)$$

$$AN^2 : AM^2 = \text{rett.}(MH) : \text{rett.}(LF)$$

$$AP^2 : AO^2 = \text{rett.}(OB) : \text{rett.}(NI)$$

Da queste proporzioni si ottiene:

$$(AK^2 + AL^2 + AM^2 + AN^2 + AO^2 + AP^2) : \text{rett.}(KZ + KE + LF + MH + NI + OB) = n \cdot AP^2 : n \cdot \text{rett.}(OB);$$

$$(AK^2 + AL^2 + AM^2 + AN^2 + AO^2 + AP^2) : n \cdot AP^2 = \text{rett.}(KZ + KE + LF + MH + NI + OB) : n \cdot \text{rett.}(OB).$$

Indicando AK con d, si ha AL = 2d; AM = 3d; ...; AO = (n-1)d; AP = nd per cui il primo rapporto si può scrivere nella forma tale da poter applicare il corollario (1) di Archimede:

$$\{d^2 + (2d)^2 + (3d)^2 + \dots + [(n-1)d]^2 + (nd)^2\} : n(nd)^2 > 1/3.$$

Da ciò segue che anche il secondo rapporto dell'ultima proporzione deve essere maggiore di 1/3, ossia:

$$\text{rett.}(KZ + KE + LF + MH + NI + OB) : n \cdot \text{rett.}(OB) > 1/3;$$

ma la somma dei rettangoli è la figura circoscritta mentre n·rett. (OB) è il rettangolo ACBP. Si è ottenuto dunque:

$$\text{Figura circoscr.} > 1/3 \cdot \text{ACBP}$$

In contrasto con il risultato (^) già ottenuto.

Analogo assurdo si otterrebbe supponendo $BAP > 1/3 \cdot \text{ACBP}$ pertanto la proprietà (^) di Galileo si può considerare dimostrata; da cui la quadratura della parabola.

La proprietà dimostrata da Galileo potrebbe sembrare limitata al solo segmento parabolico con base perpendicolare all'asse. Essa è però facilmente estendibile ad ogni caso, tenuto conto, come dimostrò lo stesso Archimede nella terza proposizione della sua *Quadratura della parabola* che la proprietà della parabola è più generale di quella che abbiamo applicato.

Infatti, considerata una qualsiasi corda AB (v. fig. 9) e tutte le altre a que-

¹² I rapporti sono tutti uguali poiché si tratta della stessa parabola.

sta parallele, il luogo dei punti medi è una retta (“diametro coniugato” alla direzione di AB) tale che, qualunque sia la corda parallela alla AB si ha:

$$A'D'^2 = k \cdot CD'$$

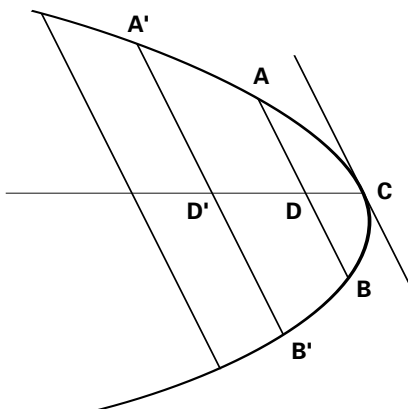


Fig. 9

Si può quindi concludere che qualunque segmento parabolico considerato è uguale ai $\frac{4}{3}$ del triangolo massimo inscritto in esso.

