LAS TÉCNICAS DEL CÁLCULO: FERMAT, WALLIS Y ROBERVAL

Pedro Miguel González Urbaneja
Profesor de Matemáticas
I.B. San José de Calasanz.
Barcelona

Fermat es uno de los más grandes genios que haya ilustrado Francia

Cauchy, 1839.

1. Introducción

1.1. Naturaleza del cálculo del siglo XVII.

La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la Matemática clásica griega. El paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica, cuyo exponente más representativo es la enciclópedica obra de Euclides «Los Elementos» es violado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se impone el lema «primero inventar, después demostrar». Bajo el nuevo enfoque se trata de crear, descubrir, no de expresar demostrativamente, axiomáticamente.

La Matemática griega es ponderada por su alto grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto, el camuflaje permanente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio: el método de exhaución de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo clima psicológico y una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, que permitió el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales, ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que echar por la borda el rigor.

Las especulaciones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo propiciaron que los matemáticos posteriores no fueran refractarios a la utilización de las técnicas infinitesimales. El Álgebra simbólica de Vieta y Descartes aplicado al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas. Finalmente la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc.

Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos (problemas arquimedianos, técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica y sobre todo el libre uso del concepto intuitivo de infinito), el siglo XVII produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

En particular, respecto del Cálculo Infinitesimal, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido («indivisibles», «infinitamente pequeños», «incrementos evanescentes», «cantidades despreciables», etc.), se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Bajo esta perpectiva, resulta que los matemáticos que desarrollaron el germen del Cálculo Integral, habiendo bebido en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes, (que ahora tenían a su disposición), donde el método de exhaución presidía todo el desarrollo con un implacable rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaución mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del método mecánico del «Método» de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B.Pascal (que aplica ingeniosamente su «método de la balanza», llamada «balanza de Arquímedes» en los famosos problemas sobre la cicloide), y sobre todo, en el caso de Cavalieri, con sus indivisibles.

Aunque el siglo XVII no dispuso del «Método» de Arquímedes, el cúmulo de analogías es evidente, lo que hace comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos, de que Arquímedes disponía de un método especial de descubrimiento.

A comienzos del siglo XVII aparecen métodos infinitesimales que modifican y simplifican los métodos de Arquímedes, intentando obviar la necesidad de la doble reducción al absurdo de la exhaución. Con el uso de los *indivisibles* y los *infinitamente pequeños* se resiente el rigor en las demostraciónes y van desarrollándose consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

Para Cavalieri un área estaba formada por un número infinito de líneas paralelas o *indivisibles*, que al compararlos con los recursos algebraicos de que disponía, podía, por una parte, ratificar los resultados clásicos (lo que daría seguridad a su método), y por otra, obtener cuadraturas y cubaturas no conocidas por los antiguos. Sorprende la estrecha analogía entre el «Método de los indivisibles» y el «Método mecánico» de Arquímedes. Pero Arquímedes tenía muy claro y así lo manifiesta en el preámbulo del «Método» que «la investigación obtenida por este método no implica verdadera demostración», por eso ha de confirmar rigurosamente lo que descubre mediante el método de exhaución. La analogía está en la primera etapa de la creación, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles, el Álgebra le facilita esta operación y proporciona unas posibilidades de generalización imposibles de lograr con la Geometría griega.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método de los indivisibles como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaución (punto de vista arquimediano). En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaución, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. Vamos a reproducir algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

J. KEPLER («Nova stereometria doliorum vinariorum» de 1615):

> [...]. *Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.*

P. FERMAT (De aequationum localium .... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis [Tratado sobre cuadratura] de 1658):

> [...]. *Basta hacer esta observación* [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] *una vez, para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras..., Así alcanzamos la conclusión,* [véase sección 2.7.1] *que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.* [...].

B. CAVALIERI (Geometría Indivisibilibus continuorum...) de 1635:

> [...]. *Se podría demostrar todo ésto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.*

B. PASCAL (Lettre à Carcavi,):

> [...]. *He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos* [como Arquímedes]*: y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar.*

I. BARROW (Lectiones Geometricae de 1670):

> [...]. *Se podría alargar mediante un discurso apagógico* [mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución], *pero ¿para qué?*

J. WALLIS (Arithmetica infinitorum de 1656):

> [...]. *Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.*

C. HUYGENS (Horologium oscillatorium de 1673):

> [...]. *No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo.*

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de Arquímedes sobre los matemáticos del siglo XVII, pero sirven sobre todo para mostrar la primacía de la argumentación heurística sobre la apodíctica, de la ponderación del método de descubrimiento por encima de la expresión rigurosa.

El método de lo indivisibles recibió acerbas críticas dirigidas contra su propia naturaleza, debido al problema que plantean sobre la estructura del continuo, toda vez que contradecían la doctrina aristotélica del continuo, como divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, divisibles de nuevo indefinidamente. Por eso Fermat, Roberval, Wallis y otros, recogen estas críticas e intentan modificar los procedimientos de Cavalieri, para evitar los errores de dimensionalidad, manifestando que no se toman segmentos para la suma de todas las ordenadas, sino rectángulos de anchura infinitesimal, «infinitesimales», lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso, pero salva, mejor que peor, la homogeneidad. Con ello se abre la segunda etapa del Cálculo Infinitesimal, sustituyendo los indivisibles por los «infinitamente pequeños» de igual dimensión geométrica espacial que la figura a la que pertenecen. Como no se sabe muy bien lo que es una magnitud infinitesimal ni lo que debe entenderse por una suma de infinitos sumandos, el rigor brilla por su ausencia, pero como contrapartida la fecundidad de los nuevos métodos fue asombrosa.

1.2. Análisis temático del cálculo del siglo XVII.

El Cálculo del siglo XVII estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos («las cónicas de Menecmo y Apolonio», «la cuadratriz de Dinostrato», «la concoide de Nicomedes», «la cisoide de Diocles», «la hipopede de Eudoxo», «la espiral de Arquímedes», etc), pero en seguida esta colección se vio complementada por multitud de nuevas curvas, entre las que sobresalen «las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior» (llamadas de Fermat), «el caracol de Pascal», «el folium de Descartes o galande de Barrow», «la curva de Lamé», «la espiral logarítmica», «la kappa-curva», «la curva tangentoidal», y ante todo la reina de todas las curvas: «la cicloide».

Contrariamente al punto de vista estático que fue casi exclusivo (salvo quizá en el estudio de la espiral de Arquímedes) en el tratamiento de las curvas en Grecia, en el siglo XVII se abre paso en seguida el punto de vista cinemático, de manera que desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades. Particularmente el estudio de la espiral logarítmica y de la cicloide contribuye a la simbiosis de los métodos geométricos con los cinemáticos. En efecto, una curva se puede considerar como «la trayectoria de un punto en movimiento» y la tangente como la recta que «pasa por dos posiciones consecutivas». El principio de la composición de movimientos y más precisamente de la composición de velocidades permite a Torricelli, Roberval y otros, disponer de un método general de obtención de tangentes, para curvas que se pueden definir cinemáticamente.

Y todo ello a pesar de Descartes que trataba desdeñosamente de «mecánicas» a las curvas no algebraicas, y pretendía su exclusión de la Geometría. Para curvas algebraicas, Descartes da un método de obtención de tangentes, basado en consideraciones sobre raíces dobles, bajo un punto de vista en absoluto diferencial, independiente del concepto de límite y que es el de la Geometría Algebraica. Algoritmos formales pseudo-diferenciales fueron desarrollados para facilitar la obtención de las raíces dobles del método de Descartes con la regla de Hudde y adelantando la derivación implícita de funciones algebraicas con la regla de Sluse.

Pero no es ésta la forma imperante de pensar y hacer. En efecto, los métodos algebraicos sufrirán un cierto eclipse, absorbidos de forma provisional por los métodos cinemático-diferenciales de Roberval, Fermat y Barrow. Se defiende que las curvas definidas cinemáticamente son como las demás, no hay por qué hacer distinción, todas pueden estudiarse por los mismos métodos. La variable «tiempo» en los trabajos de Barrow se convierte en una variable independiente universal de la que dependerá la variación simultánea de varias magnitudes, como base de un Cálculo Infinitesimal de tendencia geométrica, ideas que son el punto de partida de Newton, para quien sus «fluyentes» son las distintas magnitudes funciones de un tiempo, que es un parámetro universal, mientras sus «fluxiones» son las «derivadas» respecto al tiempo, lo que supone la culminación de los métodos cinemáticos.

Otro aspecto decisivo del Cálculo del siglo XVII es que se empieza a intentar una clasificación de los problemas. Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. Fermat unifica los tres aspectos e inicia el argumento diferencial de «incrementar la variable independiente» y valorando el correspondiente incremento de la función considerar por primera vez (aunque manteniéndose en el terreno de lo operativo y algebraico) el cociente incremental que definirá la primera derivada. Por ello Laplace y la mayor parte de los matemáticos franceses consideran a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Coordinados los aspectos vinculados a la *primera derivada*, hay que decir que los relativos a la *segunda derivada* tardarán bastante más en unificarse, lo que llevará a cabo Huygens a propósito de las evolutas y del radio de curvatura de una curva.

Respecto al Cálculo Integral se estudiaban desde la época clásica griega, los problemas de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad. El siglo XVII ampliará considerablemente el número de cuadraturas y cubaturas en relación con la ingente cantidad de nuevas curvas que se definen, añade la rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución (en la antigüedad sólo Arquímedes había tratado los casos particulares de la rectificación de la circunferencia en «Sobre la medida del círculo» y la superficie de la esfera en «Sobre la esfera y el cilindro»). Se emprendería una clasificación de los problemas según la naturaleza de la «integral subyacente». Para áreas y volúmenes el paso fundamental lo da Cavalieri con sus indivisibles, donde reconoce que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la cuadratura $\int x^n dx$ (área limitada por la curva $y=x^n$ y ciertas ordenadas), para $n=1,2,3$. Sigue inmediatamente el intento de generalizar la cuadratura de Cavalieri para *n* racional distinto de -1 (para $n=-1$, la llamada cuadratura de la *hipérbola de Apolonio* se tardaría bastante más tiempo en resolver), con una profusión de magníficos resultados sobre cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas, algunas obtenidas por indivisibles o infinitesimales, (Roberval, Pascal,...), otras mediante cuadraturas aritméticas (que se basarían en el modelo de la cuadratura de la espiral por Arquímedes) por medio de diversas fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros obtenidas por consideraciones sobre números poligonales (Fermat) o sobre el triángulo aritmético (Pascal); otras obtenidas empíricamente a base de una buena dosis de inducción incompleta y otras por originales métodos como el de la progresión geométrica de Fermat.

De esta forma todos los problemas sobre áreas y volúmenes pudieron reducirse a cuadraturas. Dos problemas se consideraban equivalentes cuando dependían de la misma cuadratura (por ejemplo Cavalieri demostrará que el problema del volumen de la pirámide y el de la cuadratura de la parábola son equivalentes porque ambos dependen de la cuadratura $\int x^2 dx$). Se disponía por tanto de una forma de clasificar los problemas según el grado de la dificultad de la cuadratura a que daban lugar.

Si a ésto le añadimos que tanto Pascal como Barrow, obtienen mediante consideraciones geométricas resultados asimilables a los métodos de «integración por partes» e «integración por cambios de variable», resulta que los matemáticos del momento pueden resolver ya infinidad de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso.

Pero todavía quedaban por resolver los arduos problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola de Apolonio, a lo que se enfocan cieros trabajos de Saint-Vincent, Mercator, Wallis, Gregory y Newton, mediante procedimientos de interpolación indefinida de funciones circulares y logarítmicas, que pronto darán lugar con Newton y Leibniz a los métodos generales de desarrollo en serie. Entre los algoritmos infinitos obtenidos sobresalen los sensacionales descubrimientos de la serie de Mercator para el logaritmo en relación con la cuadratura de la hipérbola:

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \ldots,$$

así como el desarrollo de Wallis de 1/2 en producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots$$

y el desarrollo de la serie binomial de Newton:

$$(1-X^2)^{1/2} = 1 - (1/2)X^2 - (1/8)X^4 - (1/16)X^6 - (5/128)X^8 - \ldots$$

ambos en relación con la cuadratura del círculo.

Los problemas de la rectificación de curvas se resolvieron más tardíamente. Históricamente la primera curva rectificada después del círculo fue la espiral logarítmica (llamada por Torricelli «espiral geométrica» para distinguirla de la espiral de Arquímedes, que sería la «espiral aritmética»). El problema fue resuelto por medios cinemáticos hacia 1640 por Roberval y Torricelli. Neil resuelve hacia 1658 la rectificación de la parábola semi-cúbica $kX^2=Y^3$, llamada «parábola de Neil», mientras Roberval y Wren consiguen rectificar la cicloide hacia 1659 o antes. Por las mismas fechas Pascal obtiene la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes con la de una parábola («Egalité des lignes spirale et parabolique» de «Les Lettres de A. de Dettonville»). Respondiendo a estos éxitos de Wren y Pascal, Fermat escribe hacia 1659 un tratado general sobre rectificación («De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica») en el que aplicando el material desarrollado en sus cuadraturas y con base en la parábola de Neil obtiene la rectificación de una familia infinita de curvas. Varios matemáticos reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola, ejemplo importante porque aparece como caso particular según el cual la rectificación de la curva $y=f(x)$ se corresponde con la cuadratura de la curva $y=[1+f'(x)^{1/2}$, de manera que el problema de la rectificación forma una transición geométrica natural entre la diferenciación que presupone y la integración a la que se reduce, contribuyendo a vincular así los dos tipos fundamentales de problemas del Cálculo: las tangentes y las cuadraturas.

Precisamente el descubrimiento de que tales problemas, las cuadraturas y las tangentes, son en cierto modo inversos uno del otro, cuestión vislumbrada por Barrow (aunque oscurecida un tanto por el abstruso lenguaje geométrico-sintético que utiliza), en la mente de Newton y Leibniz fraguó de tal forma, que constituyó un componente esencial en la sistematización del Cálculo por ambos, destilando de la rica miscelánea de técnicas infinitesimales anteriores un poderoso algoritmo instrumental para el cálculo sistemático de áreas y tangentes.

3. La cuadratura básica: $\int_o^a X^k\,dx$.

Puede decirse que las técnicas para las cuadraturas del siglo XVII están enfocadas esencialmente al establecimiento de la cuadratura básica $\int x^k dx$, mediante artificios aritmético-infinitesimales y en particular indivisibles, motivados por los intentos de atemperar la pesadez del rigor de los clásicos métodos de exhaución.

Sabemos que Arquímedes, en la cuadratura de la espiral (proposición XXIV del Libro «Sobre las espirales» utiliza resultados equivalentes a nuestras fórmulas para la suma de enteros y sus cuadrados (Proposición X de «Sobre las espirales):

$$1+2+\cdots+n=\frac{n}{2}\,(n+1)\ , \qquad 1^2+2^2+\cdots n^2=\frac{n}{6}\,(n+1)\,(2n+1)\ ,$$

Mediante estas fórmulas, Arquímedes obtiene resultados equivalentes a nuestras integrales:

$$\int_o^a x\,dx = a^2/2 \qquad \int_o^a x^2 dx = a^3/3$$

las cuales hoy establecemos mediante los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Lo que no sabemos es si Arquímedes era consciente de los lazos de parentesco existentes entre los diversos problemas que resuelve, relaciones que nosotros expresaríamos diciendo que la misma integral aparece en muchos lugares bajo aspectos geométricos diferentes.

Asimismo, Cavalieri con su original método de los indivisibles («Omneslineae») consiguirá realizar la famosa cuadratura para los enteros k=1,2,3,4,5,6 y 9.

Después de 1635 (fecha de la publicación de la obra de Cavalieri), los matemáticos se afanan en generalizar el resultado y Fermat, Roberval, Wallis y otros, dan pruebas más o menos rigurosas, para el cálculo del área bajo la parábola generalizada $y=x^k$ (k entero positivo). Algunas de las pruebas se basan en fórmulas para la suma de las primeras potencias de enteros (que sustituirán al argumento intuitivo de los indivisibles) y que conducen a las desigualdades:

$$1^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+\cdots+n^k \qquad (1)$$

generalización del mismo resultado de Arquímedes (corolario de la Proposición X de «Sobre las Espirales») para k=2,de las que nosotros precisamente deducimos el límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{K+1} \qquad (2)$$

el cual es utilizado implícitamente, disfrazado como siempre a través de la doble reducción al absurdo, que todos saben que es lo único que puede concluir con rigor el argumento, pero ninguno sigue fielmente todos los pasos que en rigor hay que dar, como hacía Arquímedes, sino que se quedan en el umbral de la exhaución, comentando que es de dominio público el camino a seguir.

Así para obtener la cuadratura

$$\int_o^a x^k dx = \frac{a^k}{k+1},$$

dividen el intervalo [o,a] en n subintervalos de longitud a/n (Fig. 1), construyendo a continuación los habituales rectángulos inscritos P_n y circunscritos Q_n, teniendo todos por base a/n y altura la determinada por la correspondiente ordenada, de manera que se obtiene para la suma de las áreas:

$$a(P_n)= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^2+2^2+\cdots(n-1)^k]$$

$$a(Q_n)= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^2+2^2+\cdots n^k]$$

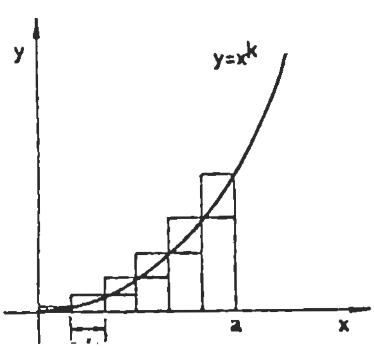

Fig. 1

Sea S el área limitada por la curva $y=x^k$ en el segmento [o,a], fácilmente se observa que se verifica:

$$a^{k+1} \frac{1^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n} < a(S) < a^{k+1} \frac{1^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

que son las desigualdades básicas para iniciar la doble reducción al absurdo que les conduzca al resultado conjeturado: el área limitada por la parábola en el segmento [o,a] es $a^{k+1}/(k+1)$.

4. Fermat, Wallis y Roberval.

Hay una tendencia aritmetizadora común en las técnicas de Cálculo Integral desarrolladas por Fermat, Wallis y Roberval, que supone una cierta ruptura conceptual y metodológica, ya no sólo con respecto a los clásicos griegos, sino también con respecto a los inmediatos anteriores trabajos de Cavalieri y Torricelli. Se conserva el fuerte interés por la Geometría de Arquímedes, pero el enfoque estrictamente geométrico de los indivisibles de Cavalieri y Torricelli es reemplazado, gracias a la incipiente Teoría de Números, por una progresiva aritmetización, que conducía al uso implícito de los límites, favorecido también por la sustitución del *indivisible* fijo y estático por el *infinitamente pequeño* de la subdivisión continua aproximándose con sus integraciones aritméticas a nuestra integral definida.

Es quizá en el caso de Roberval donde más diáfanamente se advierte esta transición, hasta el punto de que realmente utiliza infinitamente pequeños homogéneos, pero da la impresión de que lo que maneja son indivisibles heterogéneos, al obtener los resultados mediante razones de figuras que compara, lo cual introduce una cierta confusión. Por otra parte Roberval amplía el elenco de elementos infinitesimales utilizando no solo rectángulos o paralalepípedos, sino también triángulos y tubos cilíndricos infinitesimales. Roberval regresa a la concepción pitagórica de la composición aritmética de los elementos geométricos, para permitirse, por ejemplo, despreciar un cuadrado frente a un cubo, lo que desde un punto de vista aritmético supondría una intuición de límites así como una anticipación de la evanescencia de los infinitesimales de orden superior en el Cálculo Diferencial de Leibniz. Roberval resuelve la cuadratura básica $\int x^n dx$ y se acerca a nuestro Cálculo Integral con sus numerosos resultados equivalentes a integrales definidas de funciones algebraicas y trigonométricas, en especial con el estudio exhaustivo que hizo de cuadraturas y cubaturas a propósito de la cicloide.

Fermat poseía una prodigiosa erudición matemática obtenida mediante un meticuloso estudio de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Pappus. De Diofanto nace su ingente contribución al nacimiento y desarrollo de la Teoría de Números, de Apolonio y Pappus junto con Vieta su creación de una Geometría Analítica y de ambas al conectar con los trabajos de Arquímedes resultaría el alumbramiento de los numerosos métodos y artificios infinitesimales que hacen de Fermat el matemático que más contribuyó sin duda alguna al nacimiento del nuevo Cálculo que desarrollarían Newton y Leibniz.

Fermat trasciende el infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico, y ello a pesar de Aristóteles (Física,III.7) que había desterrado lo infinitamente pequeño de la Aritmética. La legitimidad de lo infinitesimal en la Aritmética queda asegurada por la consistencia de la Geometría Analítica. En efecto, el puente de doble sentido que ésta establecía entre Geometría y Algebra, permitía hacer corresponder infinitesimales numéricos a los ya clásicos infinitesimales geométricos, que hasta el momento tan útiles habían sido. Además, la asociación a una curva de una ecuación que Fermat con gran acierto denomina «propiedad específica de la curva», porque describe sus propiedades básicas, le facilita el tratamiento aritmético y algebraico de problemas que Cavalieri y Torricelli atacaron solo con Geometría sintética.

El siglo XVII fue una época capital para el desarrollo de la Matemática. En él aparecieron disciplinas matemáticas con sello propio, el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Analítica, El Cálculo de Probabilidades, la Teoría de Números, La Geometría Proyectiva, etc. Pues bien puede decirse con certeza que la figura matemática de Fermat está en el origen de casi todos los descubrimientos matemáticos del siglo XVII.

Toda persona de cultura media ha estudiado que Newton y Leibniz inventaron el Cálculo Infinitesimal, Descartes la Geometría Analítica y Pascal el Cálculo de Probabilidades. Fermat es el ascendiente directo de todos estos descubrimientos. ¿A qué se debe entonces que Fermat no ocupe en la historia de estas disciplinas científicas el lugar que le corresponde?

La respuesta a esta pregunta es múltiple y puede ir desde el más serio rigor hasta la ironía. Fermat ha precedido en la raíz a Descartes, Leibniz, Newton, Pascal, etc, pero éstos han llegado más lejos que él. Fermat ha dado el golpe inicial que es indispensable para que toda teoría se empiece a desarrollar, pero no ha constituido ninguna teoría en un cuerpo de doctrina coherente y acabado, plasmado en una obra cerrada y definitiva como por ejemplo hizo Descartes en su «Geometría».

Roger Paintandre, Profesor de Matemáticas del *Licée «Pierre Fermat»* de Toulouse ironiza (en un discurso pronunciado el 22 de junio de 1975 con motivo de la inauguración de una exposición sobre Fermat), acerca del olvido en que ha caído la figura de Fermat:

> «[...] Él [Fermat] no ha conocido por parte del gran público el renombre de un Pascal, un Galileo o un Newton.[...]. Claro está que él no tuvo la precocidad de redescubrir a Euclides a los quince años, [...]. No tuvo la fortuna de ser perseguido por la Inquisición, apenas participó en la Fronda ni comulgó en exceso con el jansenismo. Y nunca soñó con recibir una manzana sobre la cabeza mientras contemplaba la luna. ¡Falta imperdonable!. Pero más allá de estas anécdotas más o menos vanas, Fermat fue uno de los grandes genios de Francia y uno de los matemáticos más extraordinarios de todos los tiempos.»

Ironías aparte, hay otras razones para comprender la oscuridad en la que cayó la figura de Fermat. Tras la lectura de los trabajos de Fermat (en particular su correspondencia), uno se siente tentado a afirmar que Fermat hacía Matemáticas, más que por el avance de la ciencia, para saciar una irrefrenable afición y para satisfacer a sus amigos, por eso Fermat no redactó prácticamente nada de sus descubrimientos y publicó todavía menos, rehusando con energía todo ofrecimiento en este sentido, de modo que lo esencial de su obra fue desarrollada en su asidua correspondencia con los científicos coetáneos y en los márgenes de sus libros. Es en sus cartas, dando muestra de una inteligencia poderosamente sintética, donde inventa, explica, demuestra y se bate con una contundencia argumental impecable en la defensa de sus ideas. Aquí reside el poderoso atractivo que tiene la figura de Fermat para el estudioso del siglo XVII.

Wallis fue muy fecundo en creación pero parco en rigor. No abundan en su obra las demostraciones rigurosas, porque teniendo una confianza ilimitada en su intuición, aventura resultados ciertos mediante su autodenominado método de *modus inductionis*, llamado más tarde conclusión por analogía o inducción incompleta.

Los métodos algebraicos introducidos en la Geometría por Vieta, Fermat y Descartes, así como los intrumentos de computación numérica fundamentados en los logaritmos de Napier y Briggs, permiten a Wallis despegarse de los métodos geométricos de los antiguos, a los que estuvo todavía vinculado Cavalieri, para al igual que había aritmetizado «Las Cónicas» de Apolonio, aritmetizar los indivisibles de aquel, sustituyendo los infinitos indivisibles geométricos de una figura que se quiere cuadrar por indivisibles aritméticos (de ahí el nombre de su obra principal) con una longitud determinada cada uno, de manera que utilizando fórmulas sobre series de números, obtiene las cuadraturas al tomar n «muy grande» (paso al límite encubierto), es decir n tendiendo a infinito. Es precisamente en este contexto donde Wallis introduce para la posteridad el símbolo ∞ del infinito.

Veremos como Wallis desarrolla una audaz capacidad aritmetizadora. Al corriente del álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos de los Paises Bajos (Stevin, Saint-Vincent,...) y franceses (Roberval, Fermat,...), Wallis se propone rescatar e independizar a la Aritmética de la representación geométrica, rompiendo con el Álgebra Geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, que aparecía en el libro V de «Los Elementos» de Euclides. Con ello Wallis es, entre los predecesores del Cálculo, quien más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura la utiliza, por lo menos a nivel intuitivo. La fuente de inspiracion del trabajo de Wallis es el método de los indivisibles de Cavalieri. Es precisamente de la aritmetización de los indivisibles de donde destila la concepción intuitiva de límite que aplica. Wallis va más lejos que ningún otro matemático en la exploración y utilización del infinito. Con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por $1/\infty$, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal. Esto induce a la confusión de las dos concepciones de lo infinitesimal, líneas y rectángulos infinitamente pequeños, más aún cuando dice que un tal ente se le puede considerar como una pequeña anchura de modo que por una multiplicación infinita resultará una anchura dada, es decir $(a/\infty)\times\infty=a$. Así lo hace en «De sectionibus Conicis» para hallar el área del triángulo, con lo cual vemos con que gran frivolidad extrapola las propiedades de lo finito a lo infinito, haciendo gala de una absoluta relajación en el rigor.

Más cuidadoso en la manipulacion del infinito fue en su «Arithmetica Infinitorum», donde Wallis se acerca al estilo aritmético de Roberval y Fermat, para obtener, como se verá, la cuadratura básica de Cavalieri. Tanto este trabajo como el desarrollo de $\pi/2$ en producto infinito son un verdadero dechado de procedimientos heurísticos, donde la intuición, la inducción y la interpolación le guían magistralmente hacia los resultados. Comparando indivisibles aritméticos, aplicando inducción incompleta y aproximando, alcanza el resultado utilizando patentemente la idea de límite, con una precisión (por lo menos a nivel intuitivo, aunque por supuesto no riguroso) que hasta entonces no se había alcanzado. Con una audacia inefable generaliza la cuadratura para exponentes racionales mediante una interpolación y no se detiene aquí, sino que extiende la validez de la cuadratura a exponentes irracionales. Así Wallis contribuye a dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo una de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite y, por tanto, la elaboración rigurosa del nuevo Cálculo. Así que paradójicamente la ausencia de rigor de Wallis contribuiría al alumbramiento en su día de las ideas necesarias para establecer el Análisis Infinitesimal con rigor.

5. Las cuadraturas de Fermat.

5.1. Las cuadraturas ariméticas de Fermat.

El modelo arquimediano de la cuadratura de la espiral le sirve a Fermat, para realizar sus cuadraturas aritméticas, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica de Cavalieri $\int x^n dx$, a base de extender las desigualdades que Arquímedes utilizó para su exhaución. La base para este trabajo son las fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros, fundamentadas en las propiedades de los números poligonales, que Fermat obtiene inspirándose en el «Apéndice al libro de los números poligonales» que Bachet de Meziriac adjuntó a su edición de 1621 de «La Aritmética» de Diofanto.

Los métodos de cuadratura aritmética de Fermat están, pues, enfocados a buscar fórmulas para la suma de potencias de los primeros enteros, con la finalidad de justificar el límite (2) o las desigualdades (1) de la sección tercera. Para ello utilizan resultados de la incipiente teoría de números, con pruebas inductivas.

Fermat aplicando resultados sobre números poligonales establece en una carta que envía al Padre Mersenne en septiembre de 1636 (sin demostrarla explícitamente) la fórmula siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)+\cdots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\ (n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)!} \qquad (1)$$

De aquí al escribir

$$i(i+1)\ldots(i+k-1) = i^k+a_1 i^{k-1}+\cdots+a_{k-1} i$$

siendo los coeficientes constantes que dependen de k, se obtiene:

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^k+a_1\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{(k+1)!} \qquad (2)$$

de donde resulta la fórmula recurrente

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{(k+1)!} - \left[a_1\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad (3)$$

que permite hallar la suma de las k-ésimas potencias de los n primeros números enteros en función de potencias inferiores. Por ejemplo para k=2 (suma de cuadrados) se tiene aplicando lo anterior:

$$i(i+1) = i^2+1, \; a_1=1$$

$$\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{3!}$$

ahora teniendo presente la fórmula para la suma de los primeros *n* enteros:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

se obtiene finalmente para la suma de los n primeros cuadrados

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

A partir de la fórmula (3) se deduce fácilmente de forma inductiva:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{potencias inferiores de n} \quad (4)$$

de donde se puede establecer el límite de la cuadratura básica de la sección anterior:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (5)$$

Fermat inicialmente utiliza las fórmulas para realizar la cuadratura de la familia infinita de espirales generalizadas $\sigma = a\Theta^n$, pero inmediatamente advierte que con una evidente transformación a una referencia rectangular puede realizar la cuadratura de otra familia infinita de curvas, las parábolas generalizadas $y = ax^n$. Lo mismo aplica a la cubatura de conoides engendrados por la rotación de parábolas, lo que le sirve para reconocer las limitaciones de su método. Fermat guiado entonces por la naturaleza de las dificultades encontradas ingenia, como se verá más adelante, un método directo de realizar la cuadratura de las parábolas generalizadas, que además tiene la virtualidad de poder aplicarse a las hipérbolas generalizadas, salvo la hipérbola de Apolonio.

5.2. El método infinitesimal de la progresión de Fermat.

En orden a generalizar el resultado de la cuadratura de Cavalieri para n entero negativo o fraccionario, Fermat atacó y resolvió el problema hacia 1640, investigando el área entre un arco de hipérbola generalizada $x^n y^m = k$ (m,n enteros positivos) una línea ordenada y una asíntota. Su enfoque fue puramente geométrico, y a diferencia de otros trabajos anteriores, en los que se utilizaba una subdivisión equidistante en los intervalos y se comparaba el área o volumen que se quería calcular con otro conocido, Fermat tenía un método que le permitía obtener el área en términos absolutos, utilizando rectángulos infinitesimales que estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad.

La idea feliz consiste en realizar la subdivisión del eje de la figura a cuadrar (ilimitada en el caso de hipérbolas) en intervalos, de forma que se satisfagan los requisitos del método arquimediano, es decir se debe poder inscribir y circunscribir toda el área mediante rectángulos construidos sobre los intervalos en que se ha subdividido el eje, y además, de tal forma, que la diferencia entre las áreas de las dos figuras escalonadas (y por tanto de cualquiera de ellas y el área hiperbólica) sea menor que la cantidad prefijada. El método logarítmico de la progresión geométrica combinado con la «adigualdad» resuelve brillantemente la cuestión.

Veamos un ejemplo ilustrativo tomado de su tratado sobre cuadraturas «De aequationum localium... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis» de 1658.

Fermat comienza diciendo:

> [...] «Arquímedes sólo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola; en sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizá es que el artificio particular del que se sirvió para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a las otras? Cualquiera que sea la razón, yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar, tanto parábolas como hipérbolas».

El método está basado en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que Fermat enuncia así:

> «Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes».

Es fácil comprobar que esta propiedad es equivalente a la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente.

Fermat considera al principio, las hipérbolas $yx^n=k$ y manifiesta:

> «Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general».

Fermat efectúa la demostración para n=2. Con base en la Fig. 2, de la definición de la hipérbola, deduce:

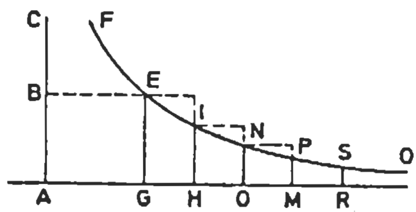

Fig. 2

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG^2}{IH} \quad (1) \qquad \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{IH}{NO} \quad (2)$$

En concreto Fermat afirma:

> «El área indefinida que tiene por base EG y que está acotada de un lado por la curva ES y de otro por la asíntota infinita GOR, es igual a una cierta área rectilínea».

El área rectilínea a que alude Fermat es el rectángulo AGEB. Basándose en la figura anterior Fermat empieza a construir los elementos necesarios para cuadrar la hipérbola:

> «Consideremos los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente. Sean los primeros términos AG, AH, AO, etc. Supongamos que estos términos están lo bastante próximos para que de acuerdo con el método de Arquímedes podamos «adigualar», como dice Diofanto, o igualar por aproximación el paralelogramo rectilíneo GExGH y el cuadrilátero mixtilíneo GHIE. Además, supondremos que los primeros intervalos GH, HO, OM, etc, son suficientemente iguales para que podamos aplicar el método de reducción de Arquímedes, mediante polígonos inscritos y circunscritos. Basta hacer esta observación una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras...»

Así pues Fermat divide el eje GOR a la derecha del punto G en intervalos GH, HO, OM, etc, de longitudes tales que se verifica:

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \cdots \quad (3)$$

$$\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \cdots \quad (4)$$

Ahora considera los rectángulos circunscritos:

$$R_1 = EGxGH, \quad R_2 = IHxHO, \quad R_2 = NOxOM, \ldots$$

y comprueba que R1, R2, R3..., forman una progresión geométrica decreciente de razón AG/AH. En efecto aplicando (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{EGxGH}{IHxHO} = \frac{AH^2xGH}{AG^2xHO} = \frac{HO^2xGH}{GH^2xHO} = \frac{HO}{GH} = \frac{AH}{AG}$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{IHxHO}{NOxOM} = \frac{AO^2xHO}{AH^2xOM} = \frac{AH^2xHO}{AG^2xOM} = \frac{AH^2xAG}{AG^2xAH} = \frac{AH}{AG}$$

Comprobando sucesivamente se demuestra que R_1, R_2, R_3..., es una progresión geométrica decreciente a la que Fermat le aplica la propiedad equivalente a su sumación. Sea S su suma, se tiene:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1} \quad \text{de donde se deduce:}$$

$$\frac{AH - AG}{AG} = \frac{EGxGH}{S - EGxGH} \quad \text{de aquí se obtiene:}$$

$$\frac{GH}{AG} = \frac{EGxGH}{S - EGxGH} \quad \text{y finalmente}$$

$$S - EGxGH = EGxAG \quad (5)$$

Ahora bien, como Fermat ha supuesto que unos intervalos «estaban lo bastante próximos» para que otros «fueran suficientemente iguales» deduce que el área definida por la hipérbola y las líneas GH, GE es, debido a (5) y a las infinitas subdivisiones, igual al área del rectángulo AGxGE, y lo hace con estas significativas palabras:

> «... Si ahora añadimos [a ambos miembros de (5)] el paralelogramo EGxGH que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes... No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio]».

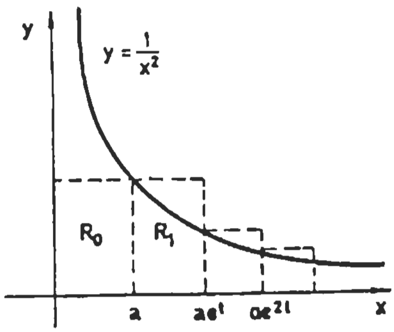

Fig. 3

El método de Fermat se ha denominado «logarítmico». En su época esta palabra todavía aludía a una cierta relación entre una progresión geométrica y una aritmética. Hoy nosotros a su método le llamaríamos «exponencial» y lo desarrollaríamos así (Fig. 3):

A partir de la abcisa x=a, efectuamos una subdivisión $x_1=ae^t$, $x_2=ae^{2t}$... en progresión geométrica de razón e^t. Calculemos las áreas de los rectángulos circunscritos:

$$R_1 = a\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2) = (e^t-1)/a$$

$$R_2 = a\cdot e^t\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2e^{2t}) = (e^t-1)/ae^t$$

es decir: $R1 = (e^t-1)/a$, $R2 = [(e^t-1)/a]\cdot e^{-t}$

Así pues, R_1, R_2, forman una progresión indefinida decreciente de razón e-t. Por tanto aplicando la fórmula de sumación, se tiene para la suma S(t), de los infinitos rectángulos R_1, R_2, ...,

$$S(t) = R_1/(1-e^{-t}) = [(e^t-1)/a]/(1-e^{-t}) = e^t/a =$$
$$(1/a) + (e^t-1)/a = R_0 + R_1$$

de donde resulta que el área limitada por la hipérbola, la ordenada x=a y la asíntota y=o, viene dada por:

$$S = \lim_{t \to 0} S(t) = (1/a) = R_0.$$

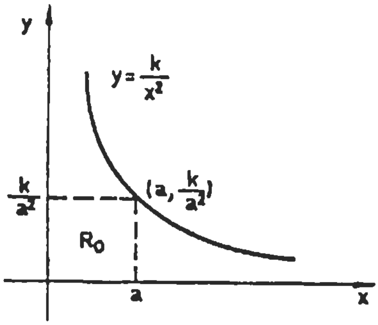

Fig. 4

El resultado es equivalente a la integral (Fig. 4)

$$\int_a^{\infty} (k/x^2)\, dx = k/a = a\cdot(k/a^2) = R_0.$$

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida: a) la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños, b) la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva, y finalmente c) un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

6. La integración aritmética de Wallis.

La cuadratura de las curvas $y=x^k$ con k no necesariamente entero positivo fue estudiada exhaustivamente por J. Wallis en su obra «Arithmetica Infinitorum» de 1655.

En la cuadatura $y=x^k$ Wallis precisa obtener el límite (1) de la sección 3, que ahora expresa en la forma:

$$\int_0^1 x^k\, dx = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{0^k + 1^k + \cdots n^k}{n^k + n^k + \ldots n^k} \right] \quad (1)$$

Wallis obtiene este límite (de lo que él llama «serie de orden k») de forma empírica. En efecto para k=3 por ejemplo obtiene los cocientes de la tabla (2), que en realidad representan la comparación de los indivisibles aritméticos de la parábola cúbica $y=x^3$ con los del rectángulo circunscrito.

Ante la evidencia numérica del cuadro (2), Wallis concluye inductivamente que se verifica:

$$\frac{0^3+1^3+\cdots n^3}{n^3+n^3+\ldots n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n} \qquad (3)$$

de manera que el límite cuando n tiende a ∞ es 1/4.

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12} \qquad (2)$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{5^3+5^3+5^3+5^3+5^3+5^3}=\frac{225}{750}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

Haciendo cálculos similares para diversos valores de k, Wallis obtiene:

$$\frac{\sum_{i=o}^{n} i}{(n+1)n}=\frac{1}{2}\ ;\quad \frac{\sum_{i=o}^{n} i^2}{(n+1)n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ ;\quad \frac{\sum_{i=o}^{n} i^3}{(n+1)n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}\ ;\cdots$$

$$\frac{\sum_{i=o}^{n} i^k}{(n+1)n^k}=\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

de donde deduce que para un k entero positivo cualquiera se verifica:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{o^k+1^k+\cdots n^k}{n^k+n^k+\cdots n^k}\right]=\frac{1}{k+1}\qquad(4)$$

Ahora ya puede calcular la cuadratura comparando indivisibles (Fig. 5):

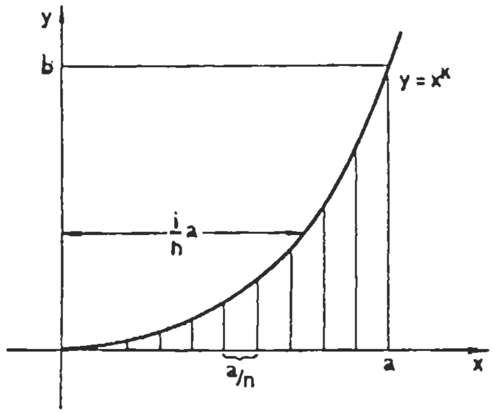

Fig. 5

$$\frac{\sum_{x=o}^{a} y}{\sum_{x=o}^{a} b} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(a\cdot o/n)^k+(a\cdot 1/n)^k+\cdots+(a\cdot n/n)^k}{a^k+a^k+\cdots+a^k}\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=o}^{n} i^k}{(n+1)n^k}=\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

resultado equivalente a la fórmula de la cuadratura básica para el entero positivo k:

$$\frac{\int_o^a x^k dx}{a^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

Para efectuar la extensión de la cuadratura desde k entero a k racional positivo, Wallis utiliza el siguiente artificio:

Se define el Índice de una función I(f) mediante la fórmula:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{f(O) + f(1) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} \right] = \frac{1}{I(f) + 1} \qquad (5)$$

presuponiendo que tal límite existe. Por ejemplo, la fórmula (4) diría que el índice de $f(x)=x^k$ es $I(x^k)=k$.

Por otra parte Wallis observa que dada una progresión geométrica de potencias enteras positivas de x, por ejemplo 1, x^3, x^5, x^7..., la correspondientes sucesión de índices 0,3,5,7..., forman una progresión aritmética. Esto es una observación trivial, pero le permite dar un gran salto adelante, de manera que mediante una audaz extrapolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica:

$$1,\ \sqrt[q]{x},\ (\sqrt[q]{x})^2,\ \ldots,\ (\sqrt[q]{x})^{q-1},\ x$$

de manera que la sucesión de sus índices:

$$O=I\ \{1\},\quad I\{\sqrt[q]{x}\},\quad I\{(\sqrt[q]{x})^2\},\ \ldots,\quad I\{\sqrt[q]{x})^{q-1}\},\quad I\{x\}=1$$

debe formar una progresión aritmética, de donde deduce que se verifica necesariamente:

$$I\{\sqrt[q]{x})^{q-1}\} = p/q$$

entonces aplicando la definición (5), obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[q]{o})^p + (\sqrt[q]{1})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p} = \frac{1}{(p/q)+1} \qquad (6)$$

A partir de (6) razonando cómo en el caso de k entero, obtiene:

$$\int_o^a x^{p/q}\, dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{p/q} \qquad (7)$$

que es el resultado de la cuadratura básica para $k=p/q$.

De esta forma Wallis era capaz de calcular las razones entre las áreas bajo las curvas $y=x^{p/q}$ y los rectángulos circunscritos, así como las razones entre los sólidos de revolución determinados por estas parábolas y sus cilindros circunscritos. A pesar de la heterodoxia de sus procedimientos, Wallis estaba convencido absolutamente de la validez de sus métodos.

Además, es en este contexto donde Wallis asocia la raíz $(\sqrt[p]{x})^q$ con el índice p/q. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

7. *Los indivisibles e infinitesimales de Roberval*

Durante largos siglos los filósofos mantuvieron opiniones diversas sobre la constitución de la materia y la estructura del continuo. Unos sostenían que la materia era infinitamente divisible y que en cada división se conservaban las propiedades básicas de la materia inicial. Otros, por el contrario, mantenían que la descomposición de la materia era limitada, de forma que se llegaría a unas partículas indivisibles o átomos cuyas propiedades ya no serían idénticas a las de la materia primigenia. Estas concepciones tuvieron su repercusión en la Matemática, de modo que la primera estaría vinculada con los *infinitesimales* y la segunda con los *indivisibles* Los indivisibles de G.P. de Roberval suponen, en cierto modo, una concepción intermedia entre ambos entes matemáticos. En efecto, Roberval maneja «infinitamente pequeños» homogéneos, pero muchas veces lo hace como si fueran los heterogéneos indivisibles, por eso su obra puede considerarse como una transición de los indivisibles de Cavalieri a los infinitesimales de Fermat o de Newton y Leibniz. Empieza llamando a su método «método de los infinitos» pero por la influencia de Cavalieri adopta en seguida la palabra indivisible. Roberval afirma en su «Traité des Indivisibles»:

> «[...] El indivisible procede de una subdivisión continua de una superficie que se puede ir estrechando hasta el infinito en pequeñas superficies... Una superficie no está compuesta realmente de líneas, o un sólido compuesto de superficies, sino constituido de pequeñas piezas de superficies y sólidos respectivamente, pero esta infinitas cosas son consideradas como si fueran indivisibles... No se comparan heterogéneos sino que los infinitos o indivisibles se conciben así: una línea está compuesta de líneas pequeñas, infinitas en número, pero se hablará del «infinito número de puntos», de forma análoga a como el «infinito número de líneas de una superficie», representará el infinito número de pequeñas superficies que llenan la superficie entera. [...]».

Las diversas subdivisiones conducen a Roberval a cálculos aritméticos con series que utiliza, no para determinar directamente el valor de una superficie o volumen, sino para comparar con otra superficie o volumen muy simple, de modo que establece una proporción por medio de la cual un cuarto término desconocido se calcula mediante otros tres conocidos.

A pesar de no tener el mismo significado que en Cavalieri, el concepto de «todas las líneas» o indivisible aparece constantemente en las cuadraturas de Roberval.

Para ilustrar lo que se acaba de exponer, parafraseando su cuadratura de la parábola, sea ABC un segmento de una parábola cuyo vértice es A y cuyo eje es AB (Fig. 6). Roberval divide la tangente AD en «un número infinito» de partes iguales: AE, EF; traza las líneas EL, FM... paralelas a AB por los puntos de división E,F..., y establece:

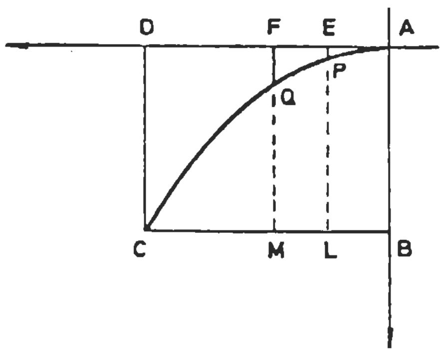

Fig. 6

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{\text{todas las líneas de ACD}}{\text{todas las líneas de ABCD}} \qquad (1)$$

La relación (1) es similar a la relación fundamental que utiliza Cavalieri para su cuadratura de la parábola cónica, pero la justificación y el uso que de ella hace Roberval es bastante diferente, ya que éste primero considera que:

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{\text{todas los rectángulos de ACD}}{\text{todas los rectángulos de ABCD}} \qquad (2)$$

donde los rectángulos infinitesimales son determinados por la división de AD. Como todos los rectángulos tienen la misma base AE, este segmento de línea puede ser cancelado en ambos miembros de (2) para obtener el segundo miembro de (1), donde «todas las líneas» significa la suma de las ordenadas. Este es el punto crucial que le permite seguir manteniendo en el discurso el término «todas las líneas».

En lenguaje actual lo que hace Roberval se explicaría así:

Sean F_1 y F_2 dos figuras planas con base rectilínea AD y limitadas por las gráficas de las funciones f_2 y f_2 y las líneas AB y DC (Fig. 7). Roberval determina la razón F_2:F_2, mediante la relación:

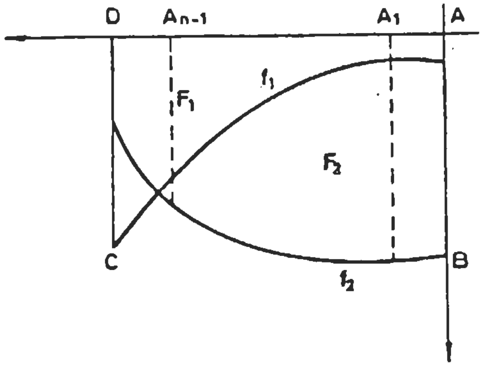

Fig. 7

$$F_1 : F_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[f_1([i/n]AD) \right] \frac{AD}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \left[f_2([i/n]AD) \right] \frac{AD}{n}}$$

En la cuadratura de la parábola F es un segmento de parábola y F2 es un rectángulo, de modo que se tiene:

$$f_1([i/n]AD) = (i^2/n^2)AD^2, \; f_2([i/n]AD) = AD^2,$$

por tanto Roberval conduce, implícitamente, la cuadratura de la parábola a la determinación del límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}}{\sum_{i=1}^{n} 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)\, n}{n^3}$$

asegurando que vale 1/3, porque para *n* suficientemente grande la cantidad

$$(1/2)n^2 + (1/6)n$$

es despreciable frente a n^3, como se ilustrará más adelante.

Es decir Roberval devuelve al indivisible la dimensión geométrica que se le había sustraído, pero utiliza muchas veces el propio lenguaje de Cavalieri, haciendo en sus figuras, al menos en apariencia, abstracción de una dimensión. Es una extraña concepción, pero le resulta fecunda utilizándola en la comparación de figuras complicadas con figuras simples, como se ha visto en el ejemplo.

Es evidente que los métodos de cuadratura por indivisibles de Cavalieri y de Roberval son bastante diferentes. El enfoque de Cavalieri es estrictamente geométrico y atenta contra la homogeneidad del espacio; el de Roberval, con su carácter aritmético e infinitesimal, está más próximo a las integraciones aritméticas de Fermat y Pascal.

Roberval trajo de nuevo la asociación de números con magnitudes geométricas, en un sentido muy próximo a lo pitagórico, bajo el enfoque de Nicomaco de Gerasa (hacia el 100 d.J.C.). Un segmento de línea es tratado como compuesto de un número infinito de pequeñas líneas representadas por puntos a los que se les hace corresponder enteros positivos.

Consideremos sucesivamente triángulos rectángulos isósceles con catetos compuestos de 4, 5, 6... puntos (o indivisibles). Al igual que Fermat, Roberval utiliza resultados sobre números poligonales, calculando que el número total de puntos en los triángulos vendrá dado por (Fig. 8):

Para el triángulo de 4 es $10=(1/2)4^2+(1/2)4$
Para el triángulo de 5 es $15=(1/2)5^2+(1/2)5$
Para el triángulo de 6 es $21=(1/2)6^2+(1/2)6$
Para el triángulo de 7 es $28=(1/2)7^2+(1/2)7$

Como se ve se trata de números triangulares, cuya expresión es:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (1/2)n^2 + (1/2)n$$

El segundo término de cada miembro de la derecha es la mitad del lado y representa el exceso del triángulo sobre la mitad del cuadrado. Este exceso disminuye indefinidamente en proporción al primer término, con el número de puntos del lado del triángulo. En concreto esta proporción va siendo 1/4, 1/5, 1/6.... Ya que el número de líneas en un triángulo geométrico o en un cuadrado es infinito, este exceso o «mitad de una línea» es despreciable y no debe entrar en consideración. Esto vendría a decirnos que el triángulo es la mitad del cuadrado, argumento fuertemente equivalente a la cuadratura

$$\int_o^a x^k dx = \frac{a^2}{2}$$

Fig. 8

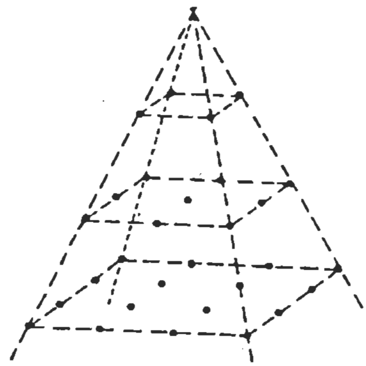

Fig. 9

Roberval continúa con este tipo de argumento y considera el caso de las líneas que siguen el orden de los cuadrados (Fig. 9). La suma de todas esas líneas (los puntos que a ellas representan) es a la última, tomada un número de veces igual al número de líneas que hay, como la pirámide es al prisma, es decir como 1 es 3. Si tenemos las pirámides de puntos con base cuadrada, con lados compuestos de 4,5,6,.... puntos o indivisibles, el número total de puntos en las pirámides viene dado por:

Para la pirámide de 4 es $30=(1/3)4^3+(1/2)4^2+(1/6)4$
Para la pirámide de 5 es $55=(1/3)5^3+(1/2)5^2+(1/6)5$
Para la pirámide de 6 es $30=(1/3)6^3+(1/2)6^2+(1/6)6$

En este caso se trata de números piramidales de base cuadrada que se expresan:

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} = (1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)n$$

En todas estas expresiones el primer término de la derecha es un tercio del cubo del lado, el segundo es la mitad del cuadrado y el tercero es la sexta parte del número de puntos del lado de la base de la pirámide. A medida que aumenta el número de puntos en el lado de la pirámide la proporción del segundo término al primero va siendo (3/2)x(1/4), (3/2)x(1/5), (3/2)x(1/6)..., y la del tercer término al primero va siendo (1/2)x(1/4), (1/2)x(1/5), (1/2)x(1/6)... Como el número de cuadrados es infinito, los dos últimos términos son despreciables frente al primero, cuando *n* se hace suficientemente grande, con lo que la suma sería 1/3 del cubo, resultado equivalente a la cuadratura

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

De la misma manera la suma de los cubos es un cuarto de la cuarta potencia, la suma de las cuartas potencias es un quinto de la quinta potencia y así sucesivamente. De esta forma Roberval obtendría un resultado equivalente a la cuadratura básica para exponente entero positivo.

La operación de despreciar los términos posteriores al primero frente a éste, simula que ciertos «infinitésimos de orden superior» se desvanecen frente a los de primer orden. En este sentido Roberval es un predecesor de Leibniz.

Retomando el tema de la cuadratura de la parábola cónica que Roberval estudia exhaustivamente en una obra que ha permanecido inédita y que se llama precisamente «La cuadratura de la parábola», sean (Fig. 6) AE=1, AF=2..., de la expresión (2) anterior se obtiene:

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{AE\cdot(EP+FQ+\cdots)}{AD\cdot DC} = \frac{AE\cdot(AE^2+AF^2+\cdots)}{AD\cdot AD^2} =$$

$$= \frac{1^2+2^2+\cdots AD^2}{AD^3} = \frac{1}{3}$$

Al generalizar, Roberval obtiene la cuadratura de las parábolas de los diversos órdenes, comenzando por la línea recta a la que llama parábola de primer grado, y continuando con la parábola cónica, la parábola cúbica y así sucesivamente hasta la parábola de grado n (Fig. 10).

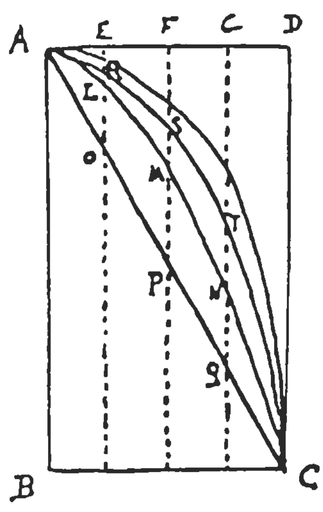

Fig. 10

Vemos como Roberval realiza una integración «cuasi-aritmética», estableciendo las sucesiones y series de numeros necesarias, pero a la hora de calcular el límite lo encubre recurriendo a la intuición geométrica. Pero con cierta generosidad diríamos que está muy cerca de la noción de «límite de la suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas», lo que le aproxima muchísimo a nuestra integral definida, en la que después de dividir una figura en pequeñas secciones, se rebajan éstas, haciéndolas decrecer continuamente en magnitud, conduciendo el problema, tras un cálculo aritmético, a sumar una serie. Realmente la única diferencia es que Roberval necesita hacer un salto lógico para calcular el límite (con una intuición infalible) y además no calcula directamente el resultado, sino a través de la comparación con una figura sencilla que suele ser un rectángulo o un cilindro.

7. *Epílogo*

Hemos descrito algunas técnicas representativas de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. Se ha dilapidado en general el rigor impecable de la exhaución griega, pero se han ingeniado magníficos métodos heurísticos de rápido descubrimiento.

A partir de aquí se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales: a) la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas y b) la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal. La parte a) es lo que llamamos el descubrimiento final del Cálculo por Newton y Leibniz. La parte b) es la puesta en orden lógico del Cálculo, que realiza Cauchy y sus continuadores, la llamada «Aritmetización del Análisis».

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc*, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que del alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales. Pero la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Si no se acertó a encontrar la técnica algorítmica general bastante tuvo que ver en ello el lenguaje matemático al uso, todavía primitivo, que se utilizaba. El gran acierto de Leibniz es precisamente la elaboración de una notación especialmente afortunada, tan identificada con los propios conceptos y tan significativamente definitiva, que, a veces, nos resulta inevitable utilizarla, anacrónicamente, para exponer los resultados infinitesimales de sus predecesores. Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo, lo que a su vez le facilitaría la utilización de los recursos algebraicos para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal, creando un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

No es fácil delimitar el nivel de contribución de cada matemático al nacimiento del Cálculo Infinitesimal. Mientras ciertas creaciones matemáticas de la época tienen un sello poderosamente individual como la Dinámica de Newton, la Geometría Proyectiva de Desargues, la Teoría de Números de Fermat, en lo que al Cálculo se refiere el descubrimiento se fue fraguando de una forma gradualmente atomizada en lentas transiciones casi imperceptibles mediante la inevitable y sucesiva aparición de nuevos conceptos, métodos y técnicas que un amplio y brillante elenco de matemáticos iban entrelazando entre sí de forma casi inextricable.

A lo largo del recorrido de la etapa empírica del desarrollo del Cálculo anterior a Newton y Leibniz, hemos visto como se iba abriendo paso lenta y subrepticiamente el concepto de límite. Aunque muchos matemáticos aplican intuitivamente nociones muy próximas a las nuestras, contextualizando sus resultados advertimos las dificultades inherentes al ejercicio del pensamiento aritmético en términos de límites, que tan imprescindible se fue manifestando durante dos siglos en la ardua tarea de reconstruir y sistematizar el Análisis, fundamentándolo en bases rigurosas.

Como conclusión, Newton y Leibniz, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores, encontrando el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a un algoritmo universalmente válido, produciendo un cambio sustancial en el tratamiento y resolución de los problemas. Recogiendo todos los componentes de «lo heurístico» de la fase empírica anterior, Newton y Leibniz, sin añadir grandes cotas de rigor, desarrollan «lo algorítmico» con la fecundidad, coherencia y generalidad de sus diferentes sistemas infinitesimales, abriendo la puerta a «lo riguroso» del Análisis moderno. Gracias a la ilustre pléyade de matemáticos que les precedieron estos sabios bien pudieron haber manifestado la frase que se atribuye a diversos científicos:

> «Si he podido vislumbrar más allá, es porque me he apoyado en hombros de gigante».

BIBLIOGRAFÍA

I. Obras originales

FERMAT: Oeuvres de Fermat. Publiées par P.Tannery. París. 1891-1912. Gauthier-Villars.

D. J. STRUIK: A Source Book in Mathematics. 1200-1800. Harvard University Press, Massachusetts 1969

II. Obras sobre autores concretos

L. AUGER: Gilles Personne de Roberval, «Un savant méconnu». Librairie scientifique A. Blanchard, París, 1962.

M. S. MAHONEY: The Mathematical Career of Pierre Fermat. Princeton University Press, 1973.

J. F. SCOTT: The Mathematical work of Jhon Wallis. Chelsea Publishing Company, New York, 1981.

III. Artículos de revistas científicas

L. BRUSOTTI: I metodi di esaustione nella storia della matematica. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol. XXX, n.º 5, 1952.

U. CASSINA: Storia del concetto di limite. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol.XVI, 1-19, 82-103, 144-167, 1936.

W. COWAN RUSELL: Fermat's contribution to the development of the differential Calculus. Scripta Mathematica, 13, 127. 1947.

T. P. NUNN: The arithmetic of infinites. Mathematical Gazzette, Vol V, 345-356, 377-386, 1910-11.

A. ROSENTHAL: The History of Calculus. American Mathematical Montly, LVII, 75-86, 1951.

D. T. WHITESIDE: Patterns of mathematical thought in de later 17th century. Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960-62, 179-388.

IV. Obras generales sobre historia del cálculo

M. E. BARON: The Origins of the Infinitesimal Calculus. London Pergamon, 1969.

C. B. BOYER: The History of the Calculus and its conceptual development. Dover, New York, 1949.

G. CASTELNUOVO: Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna. N. Zanichell Editore, Bologna, 1938.

C. H. EDWARDS: The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag, New York, 1979.

P. M. GONZÁLEZ URBANEJA: Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992.

I. GRATTAN-GUINNESS Y OTROS AUTORES: Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos. Alianza Universidad, Madrid, 1984.

O. TOEPLITZ: The Calculus, a Genetic Approach. University of Chicago Press, Chicago, 1963.

V. Obras generales sobre historia de las matemáticas

E. T. BELL: Les grands mathématiciens. Payot, París, 1950.

C. B. BOYER: Historia de las Matemáticas. Alianza Universidad, Madrid, 1986.

J. P. COLLETTE: Historia de las Matemáticas. Siglo XXI, 2 Vol. Madrid ,1985.

P. DEDRON, J. ITARD. Mathématiques et Mathématiciens. Magnard. París 1959.

J. DE LORENZO: Introducción al estilo matemático. Tecnos, Madrid, 1971.

J. REY PASTOR Y J. BABINI: Historia de la Matemática. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1951. Gedisa, Barcelona 1984.

D. E. SMITH: History of Mathematics, Dover, New York, 1958.

F. VERA: 20 matemáticos célebres. Mirasol. Buenos Aires, 1961.