EUDOXO Y LA MATEMÁTICA

Carlos Mederos Martín
I.B. VIERA Y CLAVIJO. Enero 1998
"Ciencia y cultura en la Grecia clásica y helenística"

Cuenta el profesor E. R. Dodds en el primer capítulo de su libro "Los Griegos y lo Irracional" que en cierta ocasión se encontraba en el Museo Británico contemplando las esculturas del Partenón cuando se le acercó un joven y le dijo con aire preocupado: "Sé que es horroroso confesarlo, pero este arte griego no me dice lo más mínimo". El profesor le respondió que lo que decía le parecía muy interesante, y añadió: ¿podría definir de algún modo las razones de su falta de emotividad?" Reflexionó por espacio de uno o dos minutos y después contestó: "Es todo él tan terriblemente *racional*..., ¿comprende lo que quiero decir?"

Ahora bien, todas las culturas tienen más o menos componentes irracionales, de manera que esta *"terrible racionalidad"* es lo que confiere a la cultura Griega un carácter singular, y puesto que lo sugestivo se encuentra en la singularidad y no entre la generalidad, es precisamente éste el motivo que hace que la cultura griega tenga "tantas cosas que decirnos", sin que ello signifique que lo irracional no tenga importancia en su desarrollo posterior.

Racionalidad ésta que gira en torno al concepto matemático de **proporción,** entendida como una igualdad de **razones** entre magnitudes, y cuyas huellas podemos seguir, haciendo un somero recorrido por varias manifestaciones culturales griegas que se desarrollaron en los siglos anteriores a la aparición de los Elementos de Euclides. Leemos, por ejemplo, en la obra del arquitecto romano Vitrubio (siglo I d.C.) la siguiente descripción de las columnas usadas en los edificios que siguen el orden Dórico:

> *"Ión conquistó el territorio de Caria y fundó allí ciudades grandiosas... Estas ciudades, después de haber expulsado a los carios y a los lélegos, llamaron Jonia a esta parte de la tierra a partir del nombre de su jefe Ión y, después de haber señalado recintos consagrados a los dioses inmortales, empezaron a edificar templos. El primer templo... que vieron construido así estaba en una ciudad de los dorios. Como quisieron poner columnas en este templo y no tenían las medidas de las proporciones, investigaron cómo hacerlas para que no sólo fuesen aptas para soportar la carga, sino que también fuesen de aspecto agradable por sus proporciones. Midieron la huella de un pie humano y la relacionaron con su altura. Cuando supieron que el pie era la sexta parte de la altura de un hombre, transfirieron esta relación a la columna. Hicieron la altura del fuste, incluido el capitel, seis veces mayor que la anchura de su base. Así fue como la columna dórica aportó a los edificios las proporciones de un cuerpo varonil y su solidez y belleza".*

VITRUBIO, 4, 1, 4-6

Otro ejemplo lo encontramos en la escuela escultórica de Argos, en el Peloponeso, la cual tuvo en la época clásica, entre el 460 y el 420 a.C., un maestro llamado Policleto, autor de un libro titulado "Kanon" (norma) que encierra los resultados de un minucioso estudio de las proporciones del cuerpo humano, partiendo del concepto básico de *symmetría,* o lo que es lo mismo, la relación armónica de las partes, unas con otras y cada una con el conjunto. Como demostración de los principios expuestos en su libro, Policleto hizo la estatua de un joven lancero, el Doríforo, que sirvió de modelo a muchos artistas, los cuales la llamaban "canon" como al libro.

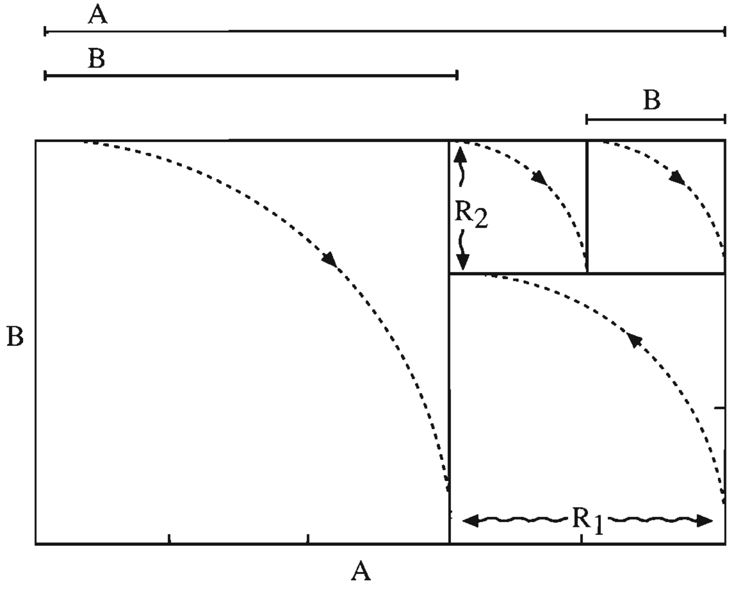
No sólo en el mundo del arte encontramos las huellas de la proporción. Un caso interesante lo constituye la medicina hipocrática, recopilada en el "*Corpus Hippocraticum*", en el que se recogen tanto las obras de Hipócrates de Cos (460-370 a.C.) como las de los miembros de su escuela. En un tratado incluido en el Corpus titulado "*La Naturaleza del Hombre*", atribuido a Polibo, yerno de Hipócrates, se describe el cuerpo humano como constituido por cuatro humores (sangre, flema, bilis y atrabilis). El hombre está sano cuando estos humores se hallan recíprocamente proporcionados en propiedades y cantidades. En cambio, está enfermo cuando hay un exceso o defecto de alguno de ellos y desaparece aquella proporción; de manera que la función del médico consiste en restablecerla.

Pero, probablemente, uno de los ejemplos más interesantes del uso de la proporción en la cultura pre-euclidea sea la teoría musical de la escuela pitagórica, fundada en Crotona (Magna Grecia) por Pitágoras de Samos durante el siglo VI a.C. Sabemos que los pitagóricos consideraban al número (entero positivo) no sólo como principio, sino como elemento constitutivo de las cosas. Se atribuye a Pitágoras el descubrimiento de que a cada uno de los diferentes armónicos de una nota le corresponde una proporción entre la longitud de toda la cuerda y la de una parte de la misma. Así cuando la razón es 1/2 tenemos la octava, si es 2/3 obtenemos la quinta, y si es 3/4 la cuarta. Esta teoría de la armonía musical es un caso particular de una teoría general de la Armonía del Cosmos, la cual establece que los planetas giran alrededor de un fuego central generando una música conocida como *"la armonía de las esferas"* y que no oímos porque nos acompaña desde nuestro nacimiento (es lo que algunos llaman *silencio).* Según Árpád Szabó ("Los principios de la Matemática Griega") el método usado por los pitagóricos para hallar las razones entre la longitud de una cuerda y la secciones de la misma que producen notas consonantes dio origen al método de las sustracciones sucesivas o *antiphairesis* (hoy llamado algoritmo de Euclides) para hallar las razón entre magnitudes en general.

Sean dos magnitudes A y B tal que A>B, para hallar la razón entre ellas, usando la *antiphairesis*, procederemos a sustraer la magnitud menor, en este caso B, de la mayor A tantas veces como se pueda, obteniéndose el resto R_1, a continuación restamos el resto R_1 de B tantas veces como sea posible, generándose el resto R_2, luego restamos R_2 tantas veces como se pueda de R_1, y así sucesivamente hasta que el resto correspondiente se anule, con lo cual hemos obtenido la medida común M de las dos magnitudes. Es claro que si aceptamos la tradición pitagórica consistente en identificar la unidad aritmética, el punto geométrico y una especie de átomo físico, podemos asegurar que este proceso de sustracción recíproca terminará después de un número finito de pasos (en el peor de los casos, la medida común M será el tamaño de un átomo); con lo cual siempre podremos hallar la razón entre dos magnitudes y expresarla como una razón entre números enteros:

$$\frac{A}{B} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} \text{ siendo n y m números (enteros positivos)}$$

La siguiente figura ilustra el proceso descrito anteriormente para m=3 y n=5:



Además, el hecho de que exista la medida común M nos permite afirmar que mA=nB, lo que resulta de utilidad para definir la proporción.

La igualdad de razones entre dos pares de magnitudes A y B por un lado, y C y D por otro, es lo que llamaremos *proporción*, que junto con la idea de número como principio de todas las cosas, confieren a la Geometría la capacidad de penetración en el "Kosmos" para obtener conocimiento cierto, como hemos visto en los ejemplos iniciales. Esta idea de proporción puede ser expresada, teniendo en cuenta el anterior concepto de razón, de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A}{B}=\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}\\[2ex]\dfrac{C}{D}=\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Leftrightarrow(mA=nB\Rightarrow mC=nD)$$

Pero, ¿por qué la Geometría se instaura como ejemplo de la posibilidad de adquirir conocimiento cierto?. Para responder a esta pregunta recurriremos a la filosofía de la escuela de Elea, especialmente a Parménides, maestro de Zenón el autor de las conocidas aporías.

Con Parménides (nacido en Elea en la segunda mitad del siglo VI a.C.) la cosmología se transforma en ontología, es decir, de la búsqueda de los primeros principios se pasa a la búsqueda de la naturaleza del ser, de manera que éste se presenta como un innovador radical en el ámbito de la filosofía de la *phisis.* De su poema *Sobre la Naturaleza* nos han llegado, gracias a Simplicio, el prólogo (o proemio) íntegro, casi toda la primera parte y algunos fragmentos de la segunda. En el prólogo se describe un viaje a la morada de la Diosa (la cual representa la verdad que se desvela) y el encuentro con ésta, quien anuncia su voluntad de hacer una importante revelación. Esta revelación consiste en la indicación de la existencia de dos vías o caminos: la vía de la verdad absoluta y del conocimiento cierto, y la vía de la opinión (doxa), es decir, de la falsedad y el error que provienen de los sentidos, los cuales sólo producen apariencias.

La vía de la verdad se podría resumir en la siguiente frase: "es y es imposible que no sea; no es y es necesario que no sea". Es decir:

El Ser Es
El No Ser No Es

Podemos entender estas afirmaciones como la formulación de un principio de no contradicción, esto es, del principio que afirma la imposibilidad de que los contrarios coexistan al mismo tiempo, llevado a los contrarios supremos: el ser y el no-ser.

Ahora bien, si del ser sólo puede decirse que es y del no-ser que no es, podemos extraer las siguientes consecuencias:

1.- EL SER ES ETERNO: Aceptar que tiene principio o fin equivaldría a afirmar que antes de ser era no-ser; o que después de ser pasará a no-ser, lo cual vulnera la regla que nos guía por la vía de la verdad.

2.- EL SER ES CONTINUO: Dado que si afirmamos que es discontinuo, estaríamos damitiendo que junto al ser hay regiones de no-ser.

3.- EL SER ES ÚNICO: Si afirmamos la existencia de cualquier otra cosa que no sea ser, estamos afirmando que el no-ser es.

4.- EL SER ES INMÓVIL: Si el no-ser no es, no existirá el vacío; y, además, si el ser es continuo y único, es imposible que pueda moverse.

De estas cuatro propiedades que Parménides deduce "por la sola fuerza de la razón", se sigue una condena de la idea de vacío, de la pluralidad y del movimiento –y por tanto una crítica radical a todo conocimiento obtenido por medio de los sentidos– que sólo nos brinda apariencias sobre las que fundar opiniones, no la Verdad.

Por otra parte, son precisamente los objetos de la Geometría los mejores candidatos a cumplir las propiedades del Ser de Parménides anteriormente expuestas, de ahí que ésta se haya instituido como ejemplo demostrativo de la posibilidad de lograr certidumbre en el conocimiento humano, ya que sus objetos respetan el supremo principio de no contradicción, o sea, pertenecen al mundo de la Verdad.

Para ver el papel desempeñado por la proporción dentro de esta concepción de la Geometría podemos recurrir a las palabras de Platón, heredero de la ontología de Parménides:

> **"No es posible que dos términos formen por sí solos una hermosa composición sin un tercero, pues es necesario que entre ellos haya un vínculo que los aproxime. Ahora bien, de todos los vínculos el más bello es el que se da a sí mismo y a los términos que une, la unidad más completa. Y es naturalmente la proporción (*analogía*), la que realiza esto del modo más bello".**

PLATÓN - Timeo

Es decir, la proporción es el vínculo que mantiene la unidad del Ser. Para aclarar esto imaginemos todas las piezas de un reloj esparcidas sobre una mesa formando una "multiplicidad" desordenada. Si conociésemos la forma en la que cada pieza se relaciona con las demás, el modo en que cada una se incluye en el conjunto; es decir, la relación entre las distintas partes y el todo; lo que tenemos encima de la mesa es un reloj. De la misma manera, consideremos, por ejemplo, los segmentos, objetos fundamentales de la Geometría. Establecer proporciones entre ellos significa describir la forma en la que cada uno de ellos es parte de otro para formar un todo: el Segmento.

De esta manera podemos asegurar, tal como sugeríamos con los ejemplos iniciales, que los objetos de la Geometría junto con la Proporción como método para explicar la relación entre las partes y el todo, constituyen la vía para la obtención de conocimiento cierto, es decir, la Vía de la Verdad.

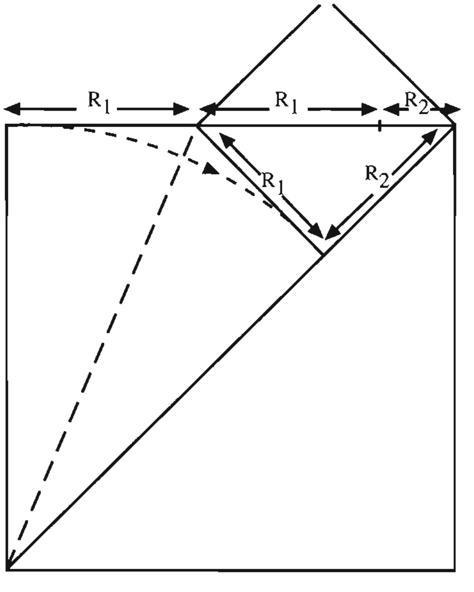
Alrededor del año 300 a.C. aparecen Los Elementos de Euclides, en los que se consagra el método axiomático deductivo como vía rigurosa para la construcción del conocimiento, y que recogen, según Proclo, los saberes matemáticos de varias generaciones de pitagóricos, para los cuales, como sabemos, el número da cuenta de todas las cosas. Si embargo, en los Elementos encontramos un hecho singular, como lo es la aparición de proposiciones aparentemente redundantes, por ejemplo:

Proposición VII - 13: "Si cuatro *números* son proporcionales, serán también proporcionales alternativamente".

Proposición V - 16: "Si cuatro *magnitudes* son proporcionales, serán también proporcionales alternativamente".

Este hecho resulta ser un indicio de un descubrimiento pitagórico que rompió la armonía que ellos mismos habían construido en torno al número, pues, ¿no explica el número todas las cosas, y por tanto, también a las magnitudes? Y si no es así, ¿qué es lo que originó esta dualidad número-magnitud?

Las respuestas a estas preguntas las encontramos en el hecho ocurrido durante la primera mitad del siglo V a.C. consistente en el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables . En efecto, se encontraron parejas de magnitudes tales que su *antiphairesis* se prolongaba indefinidamente. Por ejemplo, si intentamos hallar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado usando las sustracciones sucesivas, en primer lugar llevaremos el lado sobre la diagonal, a continuación llevamos el primer resto sobre el lado, e inmediatamente, nos encontraremos llevando el lado de un cuadrado sobre su diagonal, es decir, en la situación inicial; en consecuencia, esta situación se repetirá indefinidamente:



Surge así un objeto inquietante: el INFINITO. Para aclarar esto debemos recordar que los matemáticos griegos consideraban al número como "una pluralidad de unidades" (Elementos, Def. VII - 2), o también "multitud de unidades" (Metafísica 1053 a), por lo que son divisibles un número finito de veces, dado que la unidad es indivisible, mientras que las magnitudes son continuas, es decir, indefinidamente divisibles, de manera que si admitimos que una magnitud puede ser dividida un número infinito de veces (por ejemplo, por dicotomía) las distintas partes en las que queda dividida se desvanecerán en la NADA . Esto significa que algo que ES (la magnitud) ha pasado a NO SER (la nada). En consecuencia, si admitimos el infinito dentro de la Geometría, estaremos vulnerando el principio fundamental de no contradicción, por lo que ésta será desterrada al mundo de la *doxa*, abandonando la vía de la Verdad.

Aristóteles, al parecer, se dio cuenta de esto:

"...Los matemáticos no necesitan y no hacen ningún uso del infinito sino solamente de magnitudes tan grandes como se quiera, aunque finitas...".

FÍSICA 207 b

Además, si la *antiphairesis* entre dos magnitudes se prolonga indefinidamente, no tiene sentido hablar de *razón* entre ellas, y, por lo tanto, tampoco tendrá sentido hablar de *proporción* entre estas dos magnitudes y otras dos cualesquiera; de ahí que no podamos asegurar que el uso de la *proporción* sea una vía fiable para la obtención de conocimiento. De hecho, es posible que este sea el motivo por el que Euclides demuestra algunas proposiciones de sus cuatro primeros libros de los Elementos usando artificios relativamente más complicados que el uso de la semejanza entre figuras. Un ejemplo de esto último lo podemos encontrar en la demostración de la Proposición I - 47, conocida como Teorema de Pitágoras.

Pero quien realmente rescató a la Geometría del mundo de la opinión, devolviéndola a la vía de la verdad, evitando el infinito, y por lo tanto salvando el uso de la *proporción*, fue el matemático Eudoxo de Cnido, el cual nació en esta última ciudad alrededor del 408 a.C., aprendió matemáticas con los pitagóricos en Tarento, fue alumno de Platón en Atenas y posteriormente fundó una escuela en Cícico. Mas tarde viajó a Atenas con sus alumnos pero la hostilidad de Platón le obligó a regresar a su ciudad natal. Murió alrededor del año 355 a. C. en el curso de un viaje a Egipto.

A Eudoxo, además de ser el autor de la primera teoría astronómica conocida en la que se usan esferas concéntricas para explicar el movimiento de los astros, se le atribuyen dos hallazgos fundamentales en la Matemática: la Teoría de las Proporciones contenida en el libro V de los Elementos, y el método de Exhausción con el que se demuestran algunos teoremas del libro XII.

La atribución del contenido del libro V a Eudoxo se basa en un escolio cuyo autor es posiblemente Proclo, en el que se relata que "alguno dice" que este libro, conteniendo la teoría general de las proporciones la cual es igualmente aplicable a geometría, aritmética, música y toda ciencia matemática, "es el descubrimiento de Eudoxo..." (Euclid, ed. Heiberg., vol. V, p. 280 - citado por Heath).

De la teoría de la proporción contenida en el libro V podemos destacar las definiciones tres y cuatro, con las que se establece el concepto de razón entre magnitudes:

Definición V - 3: "Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes *homogéneas*".

Definición V - 4: "Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra".

La primera de estas definiciones adolece de cierta imprecisión que puede estar relacionada con la generalidad del Libro V, pues su contenido se aplica a cualquier tipo de magnitudes. De la misma manera que no se precisa si las magnitudes son conmensurables o no, no se precisa el tipo de relación, pues ésta depende del género de las magnitudes en cuestión. Lo que si queda claro es que para poder establecer una razón entre dos magnitudes éstas deben ser homogéneas.

La segunda de las definiciones nos da a entender que no basta con que las magnitudes sean homogéneas para poder definir una razón entre ellas, y la podemos interpretar de la siguiente forma: si A y B son magnitudes que tienen razón, entonces existen números (naturales) m y n tales que $mA > B$ y $nB > A$.; lo cual significa que por muy pequeña que sea A y por muy grande que sea B, yuxtaponiendo A consigo misma un número suficiente de veces, superará a B. Esto no es sino una forma de prohibir lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. En efecto, si A fuese infinitamente pequeña, por muchas veces que la sumemos, no superará a B. De la misma forma, si B fuese infinitamente grande no podrá ser superada por ningún múltiplo de A. Por lo tanto podemos decir que las magnitudes que tienen razón se mantienen dentro de unos márgenes "razonables".

Como consecuencia de la anterior definición de razón surge la de igualdad de razones, es decir, la proporción:

Definición V - 5: "Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente".

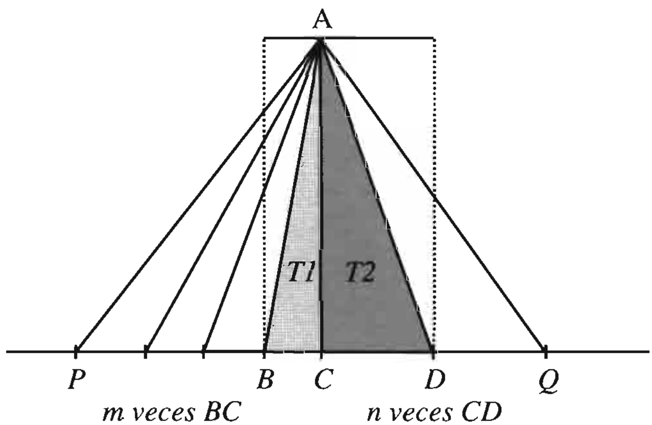
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow \begin{cases} (mA>nB \Rightarrow mC>nD) \\ (mA=nB \Rightarrow mC=nD) \quad \text{con } m \text{ y } n \text{ números cualesquiera (naturales)} \\ (mA<nB \Rightarrow mC<nD) \end{cases}$$

Esta definición es aplicable tanto a magnitudes conmensurables como inconmensurables, y permite evitar el proceso infinito que surgía al intentar hallar las razones por medio de la *antiphairesis* , restableciendo la proporción y la semejanza de figuras como herramientas de razonamiento geométrico válido. Si observamos esta definición vemos que la condición central (la igualdad) coincide con la definición obtenida por medio de la *antiphairesis* para dos pares de magnitudes conmensurables. El caso de inconmensurabilidad queda cubierto por las otras dos condiciones, en las cuales se observa el uso del concepto de razón establecido en la Definición V-4.

Un ejemplo de aplicación de la misma, en la que se puede apreciar esto último, lo encontramos en la primera proposición del libro VI de los Elementos:

> **Proposición VI - 1**: "Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre si como sus bases".

Es evidente que la anterior proposición no tendría sentido si utilizamos la *antiphairesis* para obtener las razones entre magnitudes, ya que las bases podrían ser inconmensurables; cuestión que queda soslayada si usamos la definición V-5. La demostración se basa en la siguiente figura:



en la que se ha prolongado la base BC m veces hacia la izquierda, obteniéndose m triángulos iguales a T_1 (por tener todos la misma base y la misma altura); y lo mismo hacemos con CD hacia la derecha n veces. Entonces:

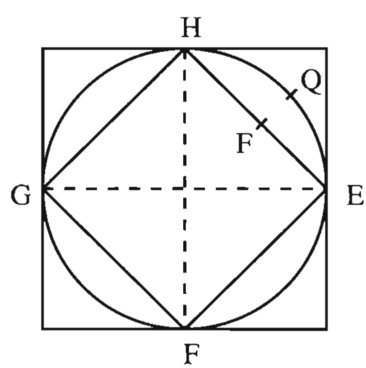
$$\left.\begin{array}{l} m\,BC<nCD\Rightarrow triang(APC)<triang(ACQ)\Rightarrow mT_1<nT_2 \\ m\,BC<nCD\Rightarrow triang(APC)<triang(ACQ)\Rightarrow mT_1<nT_2 \\ m\,BC<nCD\Rightarrow triang(APC)<triang(ACQ)\Rightarrow mT_1<nT_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{BC}{CD}=\frac{T_1}{T_2}$$

Otra consecuencia de la definición de razón dada en el Libro V, de gran importancia para excluir el infinito del razonamiento geométrico, es la primera proposición del Libro X, con la que se puede establecer una conexión entre la Teoría de las Proporciones y el Método de Exhausción, también atribuido a Eudoxo, y del que hablaremos posteriormente. Podemos afirmar que esta proposición confiere a la obra de Eudoxo un cierto carácter de unidad. Su enunciado es como sigue:

> **Proposición X - 1**: "Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada".

De esta proposición, de la que muchos dicen que es "intuitivamente evidente", podemos destacar, entre otros, dos aspectos interesantes: por un lado, resulta sorprendente que un resultado tan "sencillo" tenga unas consecuencias tan importantes para el posterior desarrollo de la Matemática (en este enunciado subyace la formulación de la idea de límite sin hacer uso del infinito, lo que permitirá "atacar geométricamente las curvas" sin tener que considerarlas como "polígonos de infinitos lados"). Por otro lado, esta proposición resulta ser una muestra de la grandeza de la Matemática Griega, pues a pesar de que parece evidente, los griegos se dieron cuenta de que la demostración no sólo era posible, sino NECESARIA, mostrando así una desconfianza absoluta de todo conocimiento obtenido por medio de los sentidos y, de paso, desvelándonos el auténtico significado de la demostración: "demostrar" es recorrer la Vía de la Verdad, haciendo ver (mostrando) en todo momento que el Ser ES y el No-Ser NO ES.

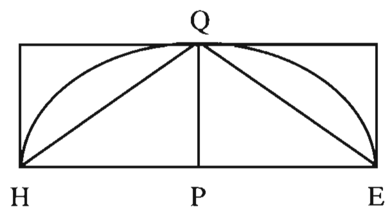
Para ilustrar el significado de esta proposición consideremos el siguiente ejemplo: sea un círculo C en el que inscribimos un cuadrado HEFG:



Es fácil ver que el área del cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo:

área(◆) = 1/2área(■) > 1/2área(●)

Consideremos ahora la magnitud diferencia entre el círculo y el cuadrado formada por cuatro segmentos circulares iguales. Si en cada uno de éstos inscribimos un triángulo como se ve en la siguiente figura:



Resulta que el área de cada triángulo es mayor que la mitad de cada uno de los segmentos circulares. En efecto:

área(▲) = 1/2área(▮) > 1/2área(◗)

Formándose así un octógono regular inscrito en el circulo. Si repetimos este proceso obtendremos un polígono de 16 lados, de 32 lados y así sucesivamente, de manera que en cada paso le restamos a la magnitud inicial (la diferencia entre el círculo y el cuadrado) una cantidad mayor que su mitad, por lo que, en virtud de la Proposición X-1 la diferencia entre el círculo y los sucesivos polígonos se puede hacer más pequeña que cualquier magnitud dada, es decir, que estos "agotan" al círculo. Esto nos permite obtener propiedades del círculo por medio de los polígonos inscritos sin necesidad de considerar al círculo como un *polígono de infinitos lados,* como había hecho Demócrito, dado que la diferencia entre éste y el polígono se puede hacer tan pequeña como se quiera, confiriendo así el necesario rigor al razonamiento geométrico, al haber excluido el uso del infinito en el tratamiento de las curvas.

En particular resulta interesante el siguiente caso: sea X un área (una figura) cualquiera y C un círculo, tal que $X<C$; consideremos la magnitud C-X. Pues bien, podemos inscribir en el círculo polígonos de un número de la forma 2^n, cada vez mayor, de lados de manera que la diferencia entre el polígono y el circulo sea menor que C-X, es decir:

$C - P(2^n) < C - X$ de donde se deduce que $X < P(2^n) < C$

Es decir, dadas dos magnitudes diferentes C y X, podemos encontrar otra magnitud $P(2^n)$ comprendida entre ambas, lo que nos da idea "aproximada" de la noción de continuidad de las magnitudes y marca la diferencia con los números (enteros positivos para los griegos), para los cuales no se cumple esta propiedad, pues dados dos números no siempre es posible encontrar otro en medio. Además, esta magnitud P es un polígono, lo que significa que es fácilmente tratable por la Geometría usando la proporción y la semejanza. En resumen, dadas dos magnitudes diferentes, por muy pequeña que sea esta diferencia, podemos encontrar una magnitud P intermedia tratable por medio de la proporción, lo que nos permite "atacar" cuestiones relativas a magnitudes cualesquiera por medio de otras especialmente manejables por la Geometría y tan próximas a aquellas como se quiera.

Este último resultado tiene especial importancia en el marco de las demostraciones por el Método de Exhausción, (nombre dado por Gregory de St. Vicent en el siglo XVII) y usado para demostrar algunas de las proposiciones contenidas en el libro XII de Los Elementos. En efecto, en el prefacio del Libro I de su tratado "Sobre la Esfera y el Cilindro", Arquímedes atribuye a Eudoxo la prueba de los teoremas que dicen que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura, y que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro de igual base y altura. En "El Método" Arquímedes dice que estos hechos fueron descubiertos, aunque no probados, por Demócrito, quien consecuentemente tiene gran parte del mérito de los teoremas, pero que fue Eudoxo el primero en aportar la demostración rigurosa, es decir sin hacer intervenir el infinito.

El Método de Exhausción lo podemos esquematizar de la siguiente forma:

Dadas cuatro magnitudes A, B, C y D queremos demostrar que forman una proporción, es decir que:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Consideraremos los siguientes pasos:

1. Suponemos que no es así, lo que significa que existirá una magnitud X tal que:

$$\frac{A}{X}=\frac{C}{D}$$

Obsérvese que esto significa que aceptamos la existencia de la cuarta proporcional.

2. Ahora suponemos que $X<B$ y aplicando la Proposición X-1 de la forma expuesta anteriormente encontramos una magnitud P comprendida entre X y B, es decir:

$$X < P < B$$

Aplicando la Teoría de las Proporciones llegamos a que esta magnitud P es contradictoria, por lo tanto X no puede ser menor que B

3. Razonamos de forma análoga para $X>B$.

4. En consecuencia queda establecido que $X=B$.

Si analizamos el método anteriormente expuesto vemos que en él confluyen una serie de hallazgos matemáticos orientados a evitar el abismo creado por la aparición del *infinito* en el seno de la Geometría: el nuevo concepto de razón, la teoría de las proporciones derivada de este y la Proposición X-1 que sirve para "dominar" la infinita divisibilidad de las magnitudes. Todo esto, junto con el "razonamiento indirecto" restablecen el rigor en la demostración, rescatando a la Geometría del pozo de la *doxa* y devolviéndola a la Vía de la Verdad. Y es evidente que el héroe de esta historia fue Eudoxo de Cnido, aunque habría que decir que este abismo siguió abierto a lo largo de la Historia y muchos pensadores de todas las épocas han seguido dando vueltas a su alrededor. Para terminar, y a modo de pequeña ilustración de lo contradictorio que subyace bajo la idea de "infinito", citaremos una frase del escritor Gilbert K. Chesterton:

> *"Nada encuentro tan maravillosamente bello como una ventana. Pero si me dejase llevar por mis inclinaciones hacia un* ***infinito*** *número de ventanas, acabaría por no haber paredes. E igualmente acabaría por no haber ventanas".*

BIBLIOGRAFÍA

Este trabajo se basa en Los Elementos de Euclides. Se han usado la versión en castellano de la editorial Gredos con introducción y notas de Luis Vega y la versión inglesa de Sir Thomas L. Heath (The Thirteen books of the Elements) editada por Dover. Además resultan de interés, con relación a este trabajo, las siguientes referencias bibliográficas:

Cañón Loyes, C.: La Matemática creación y descubrimeinto.
UPCO. Madrid 1993.

Fowler, D. H.: The Mathematics of Plato's Academy.
Oxford Science Publications 1987.

Gardies, Jean-Luis: L'Heritage Épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Librairie Philosophique J. Vrin. París 1988.

Ghika, Matila C.: Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en el Arte. Poseidón. Barcelona 1983.

Heath, T.: A History of Greek Mathematics. Dover. New York 1981.

Koelben, S.: Un jalon dans L'Histoire de la Théorie des Proportions au XVI^{e} siècle: Le comementaire de Clavius au Libre V des Elements d'Euclide.Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques - Université de Nantes.

Morey M.: Los Presocráticos (del Mito al Logos). Montesinos - Biblioteca de Divulgación Técnica. Barcelona 1981.

Reale, G.: **Antiseri, D**. Historia del Pensamiento Filosófico y Científico. Herder. Barcelona 1995.

Szabó, A.: The Beginnings of Greek Mathematics. Dordrecht.
Boston-Budapest, 1978.

También resultaron de gran interés para el desarrollo de este trabajo los siguientes artículos:

Delgado Marante, A. Método de Exhaución. Historia de la Geometría Griega - Seminario Orotava de Historia de la Ciencia - Actas del año I.

Martinón Cejas, A. La Teória de las Proporciones en los Elementos de Euclides. Historia de la Geometría Griega - Seminario Orotava de Historia de la Ciencia - Actas del año I.

Montesinos Sirera, J. El Continuo y el Infinito en la Matemática Griega. Historia de la Geometría Griega - Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Actas del año I.