ARQUÍMEDES Y LA MEDIDA DEL CÍRCULO

José Luis Montesinos Sirera
I.E.S. Villalba Hervás
La Orotava

1. INTRODUCCIÓN

En el panorama de la Ciencia griega del siglo III a.C. destaca sobremanera la figura de ARQUÍMEDES (287-212). Sus aportaciones, fundamentales, a la Geometría y a la Aritmética, a la Mecánica y a la Hidrostática le confieren una importancia singular en la Historia de la Ciencia. Junto con Euclides (c. 300) y Apolonio (270-190), constituye la llamada Edad de Oro de la Matemática griega.

Manteniendo el *rigor euclídeo*, Arquímedes imprimió a sus obras una clara intención de calcular y medir. Quizás ello se debiera a sus orígenes —era hijo de Fidias el astrónomo— y a los signos de su tiempo —fue contemporáneo de Aristarco de Samos (310-230), el matemático y astrónomo, autor de un libro *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna*, y de Eratóstenes, astrónomo y bibliotecario de Alejandría, autor de *Sobre la medida de la Tierra*, en el que nos lega su famoso cálculo del radio de la Tierra—. En ese contexto, escribió Arquímedes su libro sobre la *Medida del Círculo*.

En el Teorema I de esa obra Arquímedes nos ofrece una bella "cuadratura" del círculo con su método de exhaución; y en el Teorema III obtiene la famosísima aproximación del número p (¡la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro!), la fracción 22/7.

La enorme influencia que la obra arquimediana ejerció sobre la comunidad científica a lo largo de la Edad Media árabe y latina, así como en el Renacimiento italiano, tuvo en la *Medida del círculo* el representante más eficaz e iniciático, tanto por la fascinación de lo circular, como por la sencillez de los enunciados de sus teoremas y el magistral desarrollo de sus demostraciones.

2. DATOS BIOGRÁFICOS

Arquímedes nació en Siracusa (Sicilia) en el año 287 a.C. Debió interesarse tempranamente por la Geometría y la Astronomía ya en el hogar paterno. En su juventud viajó a Egipto. En Alejandría estudió con discípulos de Euclides. Allí conocería a Conón de Samos, admirado matemático y amigo, a quien dirigió los valiosos —para el historiador— prólogos de algunas de sus obras. A la muerte de Conón, Arquímedes continuaría enviando sus obras a Dositeo, alumno de aquel. En Egipto conoció también a Eratóstenes, director por entonces de la Biblioteca de Alejandría, matemático, filólogo y astrónomo. A él le dirigirá Arquímedes el prólogo de su libro el *Método mecánico*, obra fundamental para descubrir la manera en que el siracusano desarrollaba sus teoremas.

De vuelta a su tierra natal pasaría una vida plácida dedicada a la investigación matemática bajo los reinados de Hierón y de su hijo Gelón. Arquímedes murió en el año 212 a.C. durante el saqueo de Siracusa por parte de los romanos. Plutarco en el libro de sus *Vidas paralelas* dedicado al cónsul y general romano Marcelo[18] detalla varias anécdotas y comentarios sobre las habilidades mecánicas de Arquímedes, puestas al servicio de la defensa de Siracusa.

3. LAS OBRAS DE ARQUÍMEDES

El filólogo danés J. L. Heiberg publicó a finales del siglo XIX (traducidas de una copia del siglo XV de un manuscrito griego) las obras hasta entonces conocidas:

- *Sobre la esfera y el cilindro*, en dos libros (quizá su 5.ª obra).
- *La medida del círculo* (la 9.ª).
- *Sobre conoides y esferoides* (7.ª).
- *Sobre las espirales* (6.ª).
- *Sobre el equilibrio de los planos,* en 2 libros (1.ª y 3.ª).
- *El arenario* (10.ª).
- *La cuadratura de la parábola* (2.ª).
- *Sobre los cuerpos flotantes*, en dos libros (8.ª).

El propio Heiberg en 1906 descubriría en un palimpsesto encontrado en Constantinopla una obra de Arquímedes perdida hasta entonces, el *Método mecánico* (su 4.ª obra), que tanta luz había de arrojar sobre sus técnicas heurísticas.

Sobre la cronología de la obra arquimediana se ha escrito mucho. El gran especialista de la Matemática griega de nuestro siglo, Thomas Heath, propone el orden (indicado por los números entre paréntesis en la relación anterior). Según Heath, los propios comentarios de Arquímedes en los prefacios de algunas de sus obras y el uso de ciertos resultados obtenidos en otros de sus libros determinarían el orden propuesto[8].

Así pues, según ese orden, nuestra *Medida del círculo* y el *Arenario* serían, a pesar de sus contenidos más sencillos y del uso de técnicas menos elaboradas, obras de madurez, las últimas que Arquímedes habría compuesto.

Wilbur R. Knorr, prestigioso investigador de la Historia de la Matemática griega recientemente fallecido, se opone a la tesis de Heath y en un extenso artículo[11] propone una revisión del orden cronológico de la obra arquimediana, en la que precisamente la *Medida del círculo* y el *Arenario* encabezarían el grupo de las obras de "juventud", caracterizadas por el uso de técnicas euclídeas.

4. LA METODOLOGÍA ARQUIMEDIANA

4.1. El método de exhaución

La mayor parte de los trabajos de Arquímedes se refieren a la determinación de áreas de superficies curvas y volúmenes de sólidos, que se obtienen a través de la comparación con áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos y cubos. Su técnica demostrativa más poderosa es la combinación de un procedimiento de demostración por reducción al absurdo con el llamado método de exhaución[3].

Según Dijksterhuis[2], Arquímedes aplicaba el método de exhaución de tres formas distintas:

4.1.1. Por «aproximación», en la que una sucesión de polígonos regulares se inscribe en la figura curva en cuestión y se establece que la diferencia de áreas entre la figura curva y los polígonos es menor que una cantidad dada para un número suficientemente grande de lados del polígono regular. Normalmente cada polígono se obtiene del anterior doblando el número de sus lados.

4.1.2. Por «compresión-diferencia», en la que se encierra la figura curvilínea mediante sucesiones de polígonos regulares inscritos y circunscritos, tales que la diferencia entre ellos (el circunscrito menos el inscrito) puede hacerse menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea. De ese modo, la diferencia entre la curva dada y los términos de ambas secuencias, con mayor razón, será menor que la cantidad dada.

4.1.3. Por «compresión-división», procedimiento semejante el anterior, salvo en que la razón (división) de las áreas de los polígonos se acerca a la unidad más que cualquier razón preasignada.

Hay que observar que la exhaución por "aproximación" (cuya invención se atribuye, como hemos dicho, a Eudoxo) es la usada por Euclides en el libro XII de los *Elementos*. Las otras dos formas de exhaución, en cambio, son originales de Arquímedes.

Una vez conseguida la exhaución de la figura estudiada, mediante una doble reducción al absurdo se demuestra que el área de la figura curva es igual a un valor dado propuesto de antemano (veremos más adelante una ilustración del método en la demostración del Teorema I). ¿Pero cómo se averigua ese valor, esa fórmula que nos proporciona el área y que el método de exhaución confirma sólo mediante la reducción al absurdo?

4.2. La vía del descubrimiento

Durante mucho tiempo se pensó que Arquímedes, al igual que otros matemáticos griegos, escondía la manera de conseguir los resultados que luego probaba con el método de exhaución. En el siglo XVII Wallis, Descartes, Torricelli y otros matemáticos estaban convencidos de que Arquímedes poseía un método heurístico con el que descubría nuevos teoremas y que deliberadamente ocultaba. Cuando en 1906 Heiberg descubrió el *Método mecánico* quedó confirmada la existencia de técnicas heurísticas, no legítimas desde el punto de vista del rigor griego, pero plenas de intuición, con las que se conseguían los resultados que después se probaban con todas las de la ley[7]y[20].

El método mecánico de Arquímedes consistía en "pesar" el área o volumen de una figura en uno de los platos de una "balanza", mientras que en el otro se ponía una figura de área o volumen conocidos. Entonces, conociendo las distancias de los respectivos centros de gravedad de las figuras al "fulcro" de la balanza y aplicando las leyes de la palanca se conseguía averiguar el área o volumen deseados. Una cuestión básica en este método era el considerar un área como una suma infinita de segmentos o un volumen como una suma infinita de secciones planas. Arquímedes era muy consciente de que ese método no era riguroso, especialmente en lo que concernía a las sumas infinitas, y así lo hizo saber en su prólogo dedicado a Eratóstenes.

Por otra parte, hay que notar que Arquímedes insistía en que un "descubrimiento" no podía darse por válido, si no llevaba aparejado una rigurosa demostración. Eso queda patente en el prólogo a *Sobre las espirales*, dirigido a Dositeo. En él hace referencia a una serie de teoremas que en el pasado había enviado a su amigo Conón, dos de los cuales, relativos a la esfera, eran falsos (con resultados aparentemente ciertos pero contradictorios con teoremas ya demostrados), lo que debería prevenir, según Arquímedes, a aquellos que daban resultados como ciertos sin su correspondiente demostración.

Casi dos mil años más tarde, Galileo, ferviente admirador y asiduo lector de Arquímedes, no dará su aprobación a los resultados que su alumno Cavalieri le enviaba y que se habían obtenido por técnicas infinitesimales de dudosa ortodoxia, (similares a las técnicas heurísticas arquimedianas, pero no acompañadas de la demostración por el método de exhaución). Digamos que ni el uno ni el otro conocían el *Método mecánico*, recuperado en 1906.

4.3. Arquímedes y el infinito

Como hace notar J. L. Gardies[6], a lo largo de la obra de Arquímedes sólo dos veces se nombra la palabra "infinito" (*ápeiros*), y ello sucede al comienzo del *Arenario*, cuando Arquímedes trata de refutar la tesis de que «el número de granos de arena existentes en el mundo es infinito». Esta decidida voluntad de ocultamiento nominal de un concepto que juega un papel tan destacado en la obra arquimediana (no por casualidad se considera a Arquímedes precursor del cálculo infinitesimal) responde a exigencias "académicas" alejandrinas, euclídeas, que junto a contenidos estrictamente teóricos y rigurosos obligaban a evitar el infinito, declarado por Aristóteles, el innombrable[16].

Eudoxo fue el gran matemático griego que supo esquivar y, en cierta forma dominar, el infinito actual[13]. Suya es la idea de apartar de las consideraciones matemáticas las cantidades "infinitamente pequeñas" e "infinitamente grandes", y ello lo consigue con el enunciado que Euclides dió como definición:

***DEF. 4** del **Libro V** de los Elementos: «Se dice que dos magnitudes tienen razón, si cualquiera de ellas tiene múltiplos mayores que la otra».*

Es decir si a y b son magnitudes que tienen razón, existen números naturales m y n tales que ma > b y nb > a.

Pero la proposición o lema con la que Euclides opera a lo largo del Libro XII para obtener sus resultados sobre áreas y volúmenes mediante la exhaución, es una consecuencia inmediata de esta definición; es la

***PROP. I** del Libro X: «Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor sustraemos una magnitud mayor que su mitad, de la que queda sustraemos una magnitud mayor que su mitad y, si repetimos este proceso continuamente, llegaremos a una magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes iniciales».*

Arquímedes eleva al rango de axioma la idea de Eudoxo, modificando algo su enunciado y situándolo al comienzo de muchos de sus libros,

Axioma de Eudoxo-Arquímedes: *«De dos magnitudes desiguales, líneas, superficies o sólidos, la diferencia entre la mayor y la menor, añadida a sí misma un número suficiente de veces, puede sobrepasar cualquier magnitud dada (del mismo tipo que las comparadas)».*

5. EL CÍRCULO, FIGURA EMBLEMÁTICA DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

Desde mucho antes de que se desarrollase la Geometría teórica, la Cultura griega mostró gran interés por las figuras geométricas y especialmente por los círculos.

En el siglo V a.C., Enópides de Quíos habría, según Heath y Szabó entre otros estudiosos del tema, establecido el uso de la regla y compás como el idóneo en las construcciones geométricas, adjudicando así el rango de figuras elementales, de elementos básicos, a la recta y al círculo. Platón daría el refrendo metafísico a esta elección en el *Timeo*, al hacer que el Demiurgo forjase el alma del mundo con rectas y círculos como elementos fundamentales. Euclides haría lo propio en matemáticas al situar entre los cinco postulados de sus *Elementos*, la posibilidad de trazar la recta que une dos puntos, y su prolongación, y la posibilidad de trazar círculos (Post. 1, 2 y 3), como únicos postulados constructivos[9].

Muy pronto se haría famoso el problema de la *cuadratura del círculo* (a Anaxágoras, muerto en el 428 a.C., se le atribuye ya un intento de cuadratura), esto es, la *construcción con regla y compás* de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado. Hipócrates de Quíos (contemporáneo de Enópides) había cuadrado, ciertas lúnulas, figuras de contorno curvo, lo que hizo concebir esperanzas de una pronta resolución del problema. Hipócrates había partido de la proposición fundamental: «círculos son como los cuadrados de sus diámetros», que es la Prop. 2 del Libro XII de los *Elementos*, aunque se está de acuerdo en que la «demostración» de este teorema por parte de Hipócrates no sería la euclídea por el método de exhaución (el primer usuario del método, como hemos dicho[15], sería Eudoxo), sino una aceptación para el caso de círculos de la misma proposición que para polígonos semejantes inscritos en circunferencias (que sí se demuestra fácilmente por sencillos razonamientos de semejanza de triángulos). Hipócrates habría dado el paso, de manera intuitiva, de lo recto a lo curvo, de lo finito a lo infinito, considerando el círculo como «límite» de polígonos de infinitos lados.

Antifonte, el sofista, contemporáneo de los anteriores, "cuadró" el círculo simplemente negando que fuese necesario el paso de lo finito a lo infinito: en su geometría, una geometría empírica, el círculo coincidiría con un polígono inscrito de un número suficientemente grande de lados y el problema estaría resuelto. Esta "cuadratura" levantó las iras de Aristóteles, muy interesado en el tema, que no se dignó siquiera a refutarla. Sin embargo, la idea de Antifonte es fructífera, si de lo que se trata es de "aproximarse a la circularidad". Así lo entendió Arquímedes, como veremos más adelante, para conseguir una excelente aproximación del número p.

Por otra parte, muchas son las referencias y relaciones culturales entre el círculo y la idea de infinito; por ejemplo en Homero:

«Así pues vi, tras haber subido a una cumbre escarpada,
una isla, en torno a la cual el mar infinito formaba corona».

Dice Mondolfo en *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*[14]:

«[...] pero indudablemente la idea de la infinitud asumía mayor vigor y carácter de necesidad lógica al ser representada en una forma geométrica que por sí misma hiciese contradictoria e inadmisible la determinación de un límite inicial o final [...] y esta era precisamente el círculo [...], la representación de una especie de círculo como la que hay en el movimiento del cielo y de cada uno de los astros, por la cual llegamos a establecer una serie ordenada de manera tal que retorna nuevamente al principio y lo hace sin cesar y se comporta siempre del mismo modo [...]».

6. LA MEDIDA DEL CÍRCULO

De todos los tratados arquimedianos que se conservan, este es uno de los más conocidos. No va precedido de un prólogo y consta de tres teoremas, el segundo de los cuales es irrelevante. Los estudiosos de la obra de Arquímedes están bastante de acuerdo en que se trata de un fragmento de una obra más extensa. En cualquier caso, junto a *Sobre la esfera y el cilindro*, es la obra más citada en la antigüedad y una de las cinco arquimedianas que llegaron a las manos de Eutocio, un comentarista del siglo VI. Fue conocida y estudiada por los matemáticos medievales, árabes y latinos.

6.1. El teorema I de la *Medida del círculo*

«El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la longitud de la circunferencia del propio círculo»[17].

Sea ABCD el círculo dado y K el triángulo descrito. Entonces, si el círculo no es igual a K, será mayor o menor .

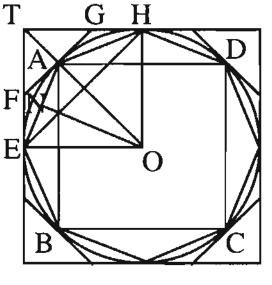
I. Supongamos, si ello es posible, que el círculo sea mayor que K. Inscribamos un cuadrado ABCD y construyamos los puntos medios de los arcos

AB,BC,CD,DA. Continuemos este proceso de bisección (si es necesario) hasta que los lados del polígono inscrito cuyos vértices son los puntos de división subtiendan segmentos circulares cuya suma sea menor que el exceso del área del círculo sobre K (1). Por tanto, el área del polígono así obtenido es mayor que K.

Sea AE un lado de éste y ON la perpendicular a AE desde el centro O. Entonces ON es menor que el radio del círculo y, por tanto, menor que uno de los catetos del triángulo K. También el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo (2), esto es, menor que el otro cateto. Consecuentemente, el área del polígono es menor que K; lo que se contradice con la hipótesis. Por tanto, el área del círculo no es mayor que K. Dejaremos a un lado la segunda parte del teorema, esto es, la demostración de que el área del círculo no es menor que K (para la que Arquímedes usa los polígonos circunscritos), y daremos paso a una serie de consideraciones:

6.1.1. Comentarios al teorema I

Arquímedes omite las demostraciones de (1) y (2), pero ambas han sido justificadas en *Sobre la esfera y el cilindro*, la primera remitiendo a la Prop. 2 del libro XII de los *Elementos*, y la segunda como inmediato corolario a un postulado colocado al inicio de la obra. Para Heath, esto probaría que la *Medida del círculo* sería posterior a *Sobre la esfera y el cilindro*. Para Knorr, al contrario, esto indicaría únicamente que Arquímedes en una primera etapa de su producción aceptaría resultados evidentes sin demostración.



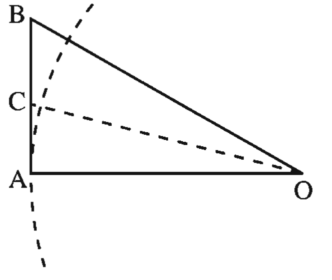
Pero ¿cuál ha sido la vía del descubrimiento del teorema, oculta bajo la impecable demostración por exhaución? Pensamos que Arquímedes pudo llegar al resultado mediante el uso heurístico de técnicas infinitesimales, «sumando» los infinitos triángulos isósceles de lados iguales al radio del círculo y de base un segmento infinitesimal que se confundiría con un arco infinitesimal de la circunferencia. Entonces el área sería igual a

$$\sum {}^{1}/_{2}.r.dc.={}^{1}/_{2}.rL_{c}$$

Arquímedes, situando este teorema al inicio de su tratado, hace un «guiño» al tema de la cuadratura del círculo. Al conseguir la equivalencia entre un círculo y un triángulo (¡que ciertamente es una figura cuadrable!) parecería resuelto el problema; pero el triángulo K no es construible con regla y compás, pues uno de los catetos es justamente la longitud de la circunferencia. Arquímedes ha conseguido «reducir» el problema de la cuadratura del círculo al de la rectificación de la circunferencia, esto es, a la construcción con regla y compás del número p. En la Prop.18 de *Sobre las espirales* obtiene una rectificación de la circunferencia a través de la curva espiral por él inventada, curva de naturaleza mecánica y no construible con regla y compás. Cabe pues, inscribir el nombre de Arquímedes entre los que «cuadraron el círculo» por medios no ortodoxos; pero es muy posible que él intuyese la imposibilidad de hacerlo con regla y compás, así como la condición de irracional del número p y ello explicaría el cálculo aproximado de éste con el que cerraría su tratado sobre el círculo.

6.1.2. El teorema III de la Medida del círculo

«La razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que 3+10/70, pero mayor que 3+10/71».



Arquímedes se limita, como ya hemos indicado anteriormente, a calcular la razón entre los perímetros de polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia y el diámetro de ésta.

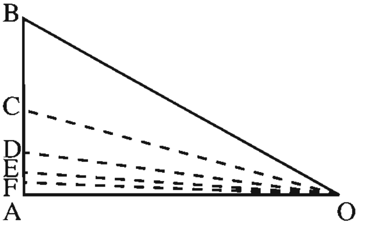
Considera un hexágono regular y luego irá doblando el número de lados hasta llegar al polígono regular de 96 lados.

Supongamos que AB sea la mitad del lado de un hexágono regular circunscrito en el círculo de radio AO y tracemos la bisectriz OC del ángulo AOB. Entonces el segmento AC es la mitad del lado del dodecágono regular circunscrito (repitiendo el mismo proceso, conseguiríamos la mitad del lado del polígono regular de 24 lados circunscrito, etc.).

Conociendo la razón AB:OA entre la mitad del lado del hexágono y el radio, esto es, la misma que entre el lado del hexágono y el diámetro, se puede conocer la razón AC:OA entre el lado del dodecágono y el diámetro. De esta manera y repitiendo el procedimiento llegaremos a saber la razón entre el lado del polígono regular de 96 lados y el diámetro de la circunferencia; bastará entonces multiplicar por 96 para encontrar la razón entre el perímetro del polígono de 96 lados circunscrito a la circunferencia y el diámetro de ésta: habremos obtenido así un *valor aproximado por exceso* del número p.

Conociendo la razón AB:OA, calcularemos la AC:OA aplicando el teorema de la bisectriz:

«En un triángulo la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados»,



en nuestro caso BC:AC=OB:OA. De aquí se deduce AB:AC=(OB+OA):OA y permutando los extremos, OA:AC=OB:AB + OA:AB

Pero el ángulo AOB es de 30º y OB:AB=2, ya que el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo es igual a su radio, esto es, a OB.

Entonces, tendremos:

$$OA:AB=\sqrt{OB^2-AB^2}:AB=\sqrt{(OB-AB)^2-1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

Llegado a este punto, Arquímedes introduce una aproximación por defecto de $\sqrt{3}$:$\sqrt{3}$ > 2+ 265:153 (cómo consigue Arquímedes esta aproximación? Este es un tema interesante y muy debatido[8].

Y se tiene: OA:AC > 2+ 265:153 = 571:153.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(OC:AC)^2 = OA^2 + AC^2 : AC^2 = 1+(OA:AC)^2 > 1+(571:153)^2 = 349450:153^2$$

y, por tanto, $OC:AC > \sqrt{349450}:153 > (591+\frac{1}{8}):153$

Laboriosamente continúa Arquímedes con sus cálculos y consigue la siguiente aproximación por defecto de AO:AF > (4673+1/2):153; o lo que es lo mismo (doblando numerador y denominador):

D:L > (4763+1/2):153,donde D = diámetro del círculo y L = Lado del polígono regular de 96 lados inscrito en la circunferencia.

Si multiplicamos los denominadores por 96, tendremos D:P > (4673+1/2):14688 y la relación buscada sería P:D < 14688:(4673+1/2).

Pero 14688 es tres veces 4673+1/2 y le sobran 667+1/2. Por tanto:

P:D < 3+(667+1/2):(4673+1/2).

con la suerte de que 4673+1/2 es un número bastante cercano a siete veces 667+1/2 (en realidad, multiplicando 667+1/2 por 7, se obtiene 4672+1/2).

Por consiguiente, con mayor razón pondremos P:D < 3+1/7.

Finalmente, *a fortiori*, **C:D < 3+1/7 = 22/7**.

Para conseguir la aproximación por defecto de C:D, Arquímedes recurre a un proceso similar con los polígonos inscritos, obteniendo C:D > 3+10/71.

6.1.3. Comentarios al teorema III

En el Papyrus Rhind, conservado en el British Museum de Londres, se encuentra una medida de ¶ atribuida al egipcio Ahmos (2000 a.C.). En él se considera como lado del cuadrado de igual área que un círculo de radio uno al diámetro del círculo disminuido en 2/9. Esto es: $\pi = (2-2/9)^2 = (16/9)^2 =$ 3,16049382

Los matemáticos griegos anteriores a Arquímedes no se interesaron por el cálculo de π. Especialmente significativa es la ausencia del mismo en los *Elementos* de Euclides.

Las aproximaciones por defecto y por exceso conseguidas por Arquímedes (3,14084507>π = 3,14159265...>3,14285714) servirían cumplidamente a las necesidades prácticas del cálculo durante muchos siglos.

La *irracionalidad* de π, esto es, el hecho de que la longitud de una circunferencia sea inconmensurable con su diámetro, fue demostrada en 1768 por Lambert, mientras que para la demostración de la *trascendencia* de π (la no existencia de un polinomio algebraico con coeficientes enteros del cual π fuese raíz) habría que esperar aún hasta von Lindeman en 1862.

7. CONCLUSIONES

En la *Medida del círculo* están ilustradas las dos facetas de la producción científica arquimediana: por una parte, el Teorema I, en el que Arquímedes conjuga la intuición del descubrimiento con el virtuosismo euclidiano de la demostración, obteniendo así un resultado pleno de consecuencias:

- Dejaba abierta otra posibilidad de cuadrar el círculo con regla y compás mediante la rectificación de la circunferencia.
- Es una admirable confirmación de que las constantes que ligaban la longitud de la circunferencia con el diámetro, y el área del círculo con el cuadrado del radio, eran la misma (¡el número π!).
- Es el embrión de otro maravilloso resultado: «el área de la superficie esférica es cuatro veces el de uno de sus círculos máximos».

Arquímedes explica en el prólogo al *Método Mecánico* cómo por un razonamiento análogo al del resultado del Teorema I llega a la conclusión de que el volumen de la esfera es igual al de un cono de área de la base igual al de la superficie esférica y de altura el radio de la esfera; lo cual, unido al teorema 34 de *Sobre la esfera y el cilindro* («el volumen de una esfera es cuatro veces el de un cono de base un círculo máximo y de altura el radio de la esfera»[17]), conduce al sorprendente resultado anterior.

Arquímedes es claramente platónico al afirmar que este descubrimiento del área de la superficie esférica «era naturalmente inherente a la esfera, pero que había permanecido oculto a aquellos que antes que yo se habían dedicado al estudio de la geometría».

Resultados como éste le hicieron merecer el sobrenombre con el que se le conoció hasta la época de Galileo: «el divino Arquímedes».

Más humano, o al menos más cercano a los intereses mundanos, es su Teorema III, es decir, en la aproximación del número π, que se seguiría usándose —inmejorada— durante más de un milenio (resultado también admirable por la destreza en el manejo de los números y porque su aritmética calculatoria con fines prácticos estaba muy lejos de los intereses platónico-euclídeos de la Academia). Este teorema, para algunos el más relevante de la contribución arquimediana a la futura Ciencia, puede representar la otra faceta —original dentro del espíritu de la matemática griega—, la del acercamiento de la Matemática a la Realidad socio-cultural, puesta al servicio de la Técnica.

Los portentosos artilugios mecánicos ideados por Arquímedes para la defensa de su patria siracusana, magnificados por escritores como Plutarco, potenciaron en la imaginación popular a lo largo de los siglos una visión de las matemáticas como disciplina capaz de controlar los fenómenos de la Naturaleza: el método físico-matemático galileano deberá mucho a la genial obra de Arquímedes.

En cuanto a la ubicación de la *Medida del círculo* en la cronología arquimediana, todas las especulaciones son posibles. Sabemos por los prólogos de algunas de sus obras que Arquímedes dejaba pasar tiempo entre sus trabajos de investigación y su "publicación", esto es, hasta el envío de esos resultados a algún miembro de la comunidad matemática alejandrina. Es muy posible que el Teorema I, por su sencillez y por el uso de técnicas euclidianas, fuese un logro de juventud; pero pensamos que el resultado del Teorema III, independientemente de la época de su obtención, fue hecho público por un Arquímedes maduro al final de su carrera, cuando seguramente la experiencia acumulada y su penetrante intuición le hacen sospechar la *realidad* del número π, al que sólo podemos acceder de manera aproximada. Y ahí se reconoce la grandeza y miseria de nuestras limitaciones.

[1] Clagett, M., Greek Science in Antiquity, Collier Books, 1976.
[2] Dijksterhuis, E. J., Archimedes, Princeton Paperbacks, 1987.
[3] Delgado, A., "Método de Exhausción", en Historia de la Geometría Griega. Actas año I. Seminario Orotava de Hª. de la Ciencia, Tenerife 1992.
[4] Dollo, C., Archimede: Mito, Tradizione, Scienza (Convegno di Siracusa, 1989), Leo S. Olschki, 1992.
[5] Frajese, A., Attraaverso la storia della matematica, Le Monnier, 1977.
[6] Gardies, J. L., Pascal: entre Eudoxe et Cantor, Librairie Philosophique J. Vrin, 1984.
[7] González-Urbaneja, P., Arquímedes, El método relativo a los teoremas mecánicos. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona 1993.

[8] Heath, T., A History of Greek Mathematics, Tomos I-II. Dover, 1981.
[9] Heath, T., The Thirteen Books of the Elements (Euclid) Tomos I-II-Iii. Dover, 1956.
[10] Heath, T., Aristarchus of Samo, Dover, (1981).
[11] Knorr, W. R., "Archimedes and the ElementS: Proposal for a revised chronological ordering of the archimedean corpus" en Archive for History of Exact Sciences XIX, 1978, pp. 211-218.
[12] Maracchia S., " La matematica greca e le costruzioni con "riga e compasso" en prensa, 1997.
[13] Mederos, C., " Eudoxo y la Matemática", ponencia año Vii Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife 1997.
[14] Modolfo, R., El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica, Ediciones Imán, Buenos Aires, 1952.
[15] Montesinos, J., "La cuadratura de la lúnulas de Hipócrates", ponencia del Seminario Orotava, año VI, Tenerife, 1997.
[16] Montesinos, J., " El continuo y el infinito en la Matemática Griega" en Historia de la Geometría Griega, actas año I Seminario Orotava, Tenerife, 1991.
[17] Mortimer , J. Adler (...), Euclid, Archimedes, Nicomachus, Encyclopedia Britannica, Chicago 1993 (=1952).
[18] Plutarco, Vidas paralelas, Planeta, Barcelona, 1991.
[19] Rufini, E., Il "Metodo" di Archimede, Feltrinelli, 1961.
[20] Vega, L., Arquímedes, El Método (introducción), Alianza Editorial, Madrid, 1986.
[21] Vega, L., " El sentido del Método de Arquímedes" en Historia de la Geometría Griega Actas año I, Seminario Orotava, Tenerife, 1991.