INFINITO Y MOVIMIENTO EN GALILEO. DEMOSTRACIONES Y CRÍTICAS

Michel Blay
Ecole Normale Supérieure de Fontenay-S[t] Cloud

Uno de los aspectos más innovadores del desarrollo de la ciencia a comienzos del siglo XVII fue la geometrización del movimiento. Por geometrización es preciso entender una serie de pasos cuyo objetivo consiste en reconstruir los fenómenos del movimiento dentro del dominio de la inteligibilidad geométrica, de tal manera que estos fenómenos se encuentren sometidos al dominio de la razón geométrica y puedan ser el objeto de una puesta en forma deductiva siguiendo el modelo de los *Elementos* de Euclides.

Sin embargo, esta empresa no está exenta de dificultades. Choca rápidamente con cuestiones que implican la consideración del infinito y, ciertamente, el retorno de las paradojas de Zenón de Elea. ¿Cómo se puede pensar la continuidad , el principio y el fin de un movimiento? ¿En su caída, los cuerpos pasan por todos los grados de velocidad o bien ésta comienza con un velocidad muy pequeña pero finita? ¿Cómo explicar la variedad de movimientos acelerados; debemos, como lo sugerían algunos atomistas, recurrir a una mezcla de movimientos y reposos? Tantas cuestiones que ocuparon a los sabios del siglo XVII, Galileo (1564-1642), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Blaise Pascal (1623-1662), y que no encontraron finalmente una respuesta matemática explícita hasta principios del siglo XVIII con la algoritmización de la cinemática. Las cuestiones del movimiento son entonces susceptibles, esta es la gran novedad, de ser reducidas a simples cuestiones de diferenciación e integración: la construcción de la ciencia moderna del movimiento puede, hablando propiamente, comenzar.

En una carta dirigida a Galileo fechada el 21 de marzo de 1626, Buenaventura Cavalieri subraya perfectamente la importancia y la dificultad de los problemas planteados, en el marco de la geometrización, para la comprensión del comienzo y la evolución continua del movimiento: "[...] *he llegado a producir alguna pequeña cosa sobre el movimiento, como gusta a M. Ciampoli: cuando se llega a que se debe probar que el móvil (arrivato poi a provar che il mobile...), que del reposo debe pasar a un grado cualquiera de velocidad, debe pasar por los (grados) intermedios, no encuentro ninguna razón que me tranquilice, aunque me parece que generalmente sea así* [...]"[1].

La búsqueda de una razón que tranquilice, es aquí a la vez que un programa de trabajo una actitud intelectual; es la voluntad de comprender el comienzo y la evolución continua del movimiento, pero sobre todo es la voluntad de pensar estas cuestiones matemáticamente, o más bien de construir las razones matemáticas.

¿Cómo construye Galileo, afrontando el infinito, las razones matemáticas del movimiento?

En primer lugar presentaremos las demostraciones galileanas relativas al movimiento de caída de los graves contenidas en el *Dialogo* y en los *Discorsi*; subrayaremos después, apoyándonos en las criticas formuladas por Edme Mariotte y Pierre Varignon, en qué sentido el trabajo galileano con el infinito se afirma en primer lugar como una voluntad teórica de matematización.

1) LAS DEMOSTRACIONES GALILEANAS DE LA LEY DE LA CAÍDA DE LOS GRAVES EN EL *DIALOGO* Y EN LOS *DISCORSI*

1.1. La demostración del Dialogo[2]

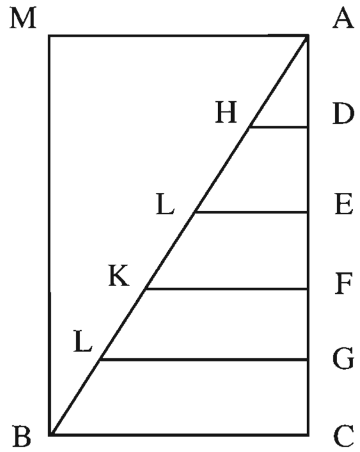
En las primeras líneas de su demostración Galileo precisa que la variación de los grados de velocidad es continua, no compuesta por pequeños saltos o pausas como sugieren, por ejemplo, los atomistas:

> *"Puesto que, en el movimiento acelerado el aumento es continuo, los grados de velocidad, la cual crece continuamente, no se pueden*

[1] Galileo, *Opere*, ed. Nacional italiana por Favaro y Longo, 20 vol, Florencia 1890-1909, XIII, p. 312.
[2] *Opere*, VIII, 255 (segunda Jornada). En lo que sigue utilizaremos la traducción francesa hecha por René Fréreux y François de Gandt, *Dialogo sobre los dos grandes sistemas del mundo* (París, Le Seuil, 1992), 241-242.

dividir en un número determinado cualquiera, porque, al cambiar de instante en instante, siempre son infinitos"[3].

Galileo representa entonces cada grado de velocidad por un pequeño segmento de recta de tal manera que a lo largo del primer tiempo AD hay, debido a la continuidad afirmada del movimiento, una infinidad de pequeños segmentos en el triángulo ADH:



"Se podría explicar mejor lo que quiero decir trazando un triángulo ABC, tomando en el lado AC cuantas partes iguales nos plazca, AD, DE, EF, FG, y trazando desde los puntos D, E, F, G, líneas rectas paralelas a la base BC. Imaginemos que las partes indicadas en la línea AC son tiempos iguales, y que las paralelas trazadas desde los puntos D, E, F, G, representan los grados de las velocidades aceleradas y crecientes uniformemente en tiempos iguales, y que el punto A es el estado de reposo[4]*, partiendo del cual el móvil, por ejemplo, en el tiempo AD haya adquirido el grado de velocidad DH, que en el tiempo siguiente la velocidad haya crecido por encima del grado DH hasta el grado EI, que se hace consiguientemente mayor en los tiempos sucesivos, según los crecimientos de las líneas FK, GL, etc. Pero, dado que la aceleración se hace continuamente de instante en instante, y no intermitentemente [intercisamente] de una parte extensa*

---

[3] *Dialogo*, 241.

[4] El análisis del principio del movimiento es un problema muy delicado que desarrollaremos en las páginas siguientes. En esta perspectiva es interesante observar que Cavalieri escribe, en una carta a Galileo con fecha del 19 de diciembre de 1634: Ahora bien, puesto que el principio y el final de un movimiento no son movimiento [...], *Opere*, XVI, 174. Ver igualmente Michel Blay, *Les raisons de l'infini* (Paris, Gallimard-Essais, 1993), capítulo III titulado "La science du mouvement dans les chantiers de l'infini".

> *de tiempo en otra, habiendo supuesto el término A como momento mínimo de velocidad, es decir como estado de reposo y como primer instante de tiempo subsiguiente AD, está claro que antes de la adquisición del grado de velocidad DH, en el tiempo AD se ha pasado por otros infinitos grados sucesivamente menores, ganados en los infinitos instantes que hay en el tiempo DA, correspondientes a los infinitos puntos que hay en la línea DA. Por ello, para representar la infinitud de grados de velocidad que preceden al grado DH, hay que suponer infinitas líneas sucesivamente menores que se supongan trazadas desde los infinitos puntos de la línea DA, paralelas a DH"*[5].

Esta infinidad de segmentos, de los cuales no se precisa si poseen o no espesor, está representada, siguiendo a Galileo, por la superficie del triángulo: *"ahora bien, esta infinidad de líneas nos es representada finalmente [in ultimo] por la superficie del triángulo AHD"*[6]. Esta superficie, evidentemente, no representa el espacio recorrido ya que Galileo señala: *"Comprenderemos así que cualquier espacio recorrido por el móvil cuyo movimiento, partiendo del reposo, y que vaya acelerándose uniformemente, ha consumado y utilizado los infinitos grados crecientes de velocidad, correspondientes a las infinitas líneas que, empezando en el punto A, se suponen trazadas paralelas a la línea HD y a las KF, LG, BC, continuando el movimiento cuanto se quiera"*.[7]

¿Qué significado dar a la superficie triangular representativa de todos los grados de velocidad? O, precisando, ¿cómo pasar de la totalidad de los grados de velocidad a los espacios recorridos?

De igual forma que en los *Discorsi*, Galileo compara un movimiento uniforme y un movimiento uniformemente acelerado. Para ello prolonga todos los segmentos de manera que representen los grados de velocidad de un movimiento rectilíneo uniforme:

> *"Completemos ahora el paralelogramo AMBC y prolonguemos hasta su lado BC no solamente las paralelas indicadas en el triángulo, sino la infinidad de las que se suponen trazadas desde todos los puntos de AC. La línea BC, que era la mayor de todas las infinitas líneas del triángulo, representaba el grado máximo de velocidad adquirido por el móvil en movimiento acelerado, y la superficie del triángulo, tomada en su totalidad, era la masa y la suma de toda la velocidad [la massa e la somma di tutta la velocità] con la cual el móvil ha recorrido un tal espacio durante el tiempo AC"*.[8]

---

[5] *Dialogo*, 241.
[6] *Ibid.*
[7] *Ibid.*, 241-242.
[8] *Ibid.*, 242.

Así pues, lejos de ser la representación del espacio recorrido, la superficie del triángulo ABC "es la masa y la suma de toda la velocidad" correspondiente al recorrido de un cierto espacio (el que está representado al lado de la figura triangular en los *Discorsi)* durante el tiempo AC.

De la misma forma, para el paralelogramo engendrado por el movimiento uniforme:

> *"[...] de la misma manera el paralelogramo resulta ser una masa y un agregado de tantos grados de velocidad, pero aquí cada grado es igual al mayor de todos ellos, BC [...]".*[9]

Galileo ha desgranado todos los elementos de su demostración, no le queda más que comparar "la masa o la suma de toda la velocidad" de los dos movimientos:

> *"[...] de la misma manera el paralelogramo resulta ser una masa y un agregado de tantos grados de velocidad, pero aquí cada grado es igual al mayor de todos ellos, BC, y la masa de velocidad [massa di velocità] resulta ser el doble de la masa de velocidades [massa delle velocità] crecientes del triángulo, dado que este paralelogramo es el doble del triángulo".*[10]

> *Finalmente, no es sino después de esta comparación, cuando se introduce la relativa a los espacios recorridos, aunque se hace en términos, "es muy razonable y probable", términos que no pueden, usando una expresión de Fontenelle, "satisfacer la razón"*[11] *plenamente.*

> *"En consecuencia, si el móvil que al caer ha utilizado los grados de velocidad acelerada correspondientes al triángulo ABC, ha recorrido en tanto tiempo un tal espacio, es muy razonable y probable que utilizando la velocidad uniforme, correspondiente al paralelogramo, en el mismo tiempo recorra con un movimiento uniforme un espacio doble que el recorrido con un movimiento acelerado".*[12]

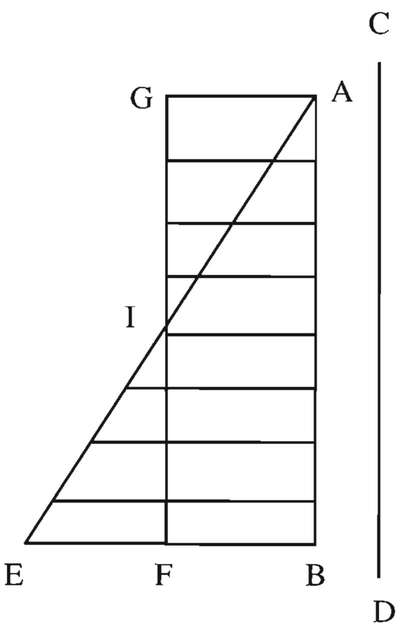
Veamos ahora la demostración dada en los *Discorsi.*

---

[9] *Ibid.*
[10] *Ibid.*
[11] Historia de la Academia Real de Ciencias con las Memorias de Matemáticas y de Física del mismo año. Extraídas de los Registros de esta Academia, Parte histórica, año 1703 (1705), 126.
[12] *Dialogo*, 242.

1.2. La demostración de los Discorsi[13]

En los *Discorsi* la ley galileana de la caída de los graves está formulada en el Teorema II de la Tecera Jornada. Sin embargo el desarrollo geométrico de este teorema se basa enteramente en los resultados obtenidos en el Teorema I o Teorema llamado del "grado medio" que pretende establecer una correspondencia entre un movimiento uniforme y un movimiento uniformemente acelerado. Este Teorema I, Proposición I, dice que: *"El tiempo durante el cual un espacio cualquiera es recorrido por un móvil, partiendo del reposo y con velocidad uniformemente acelerada, es igual al tiempo durante el cual el mismo espacio es recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme, cuyo grado de velocidad fuese la mitad del mayor y último grado de velocidad alcanzado en el movimiento acelerado"*[14]. Examinemos ahora las primeras líneas del Teorema:



> *"Representemos por la línea AB el tiempo durante el cual un móvil, partiendo del reposo en C, recorrerá con un movimiento acelerado el espacio CD; Se representará el mayor y último de los grados de*

[13] *Opere*, VIII, 43-113. En lo que sigue utilizaremos la traducción francesa hecha por Maurice Clavelin *Discours concernant deux sciences nouvelles* (París, Colin, 1970; reed. PUF, 1997).
[14] Opere, VIII, 208; Discours, 139.

velocidad adquirido durante el intervalo de tiempo AB por la línea EB, que forma con AB un ángulo recto; tracemos AE: las líneas equidistantes y paralelas a BE, trazadas desde los diferentes puntos de la línea AB, representarán los grados crecientes de velocidad adquiridos por el móvil después del instante inicial A".[15]

En este texto, Galileo introduce el grado de velocidad por su representación geométrica: un segmento de recta ("las líneas equidistantes y paralelas a BE"). ¿Cómo llega luego a pasar de la velocidad así representada a lo que constituye la clave de este teorema, a saber la comparación de los espacios recorridos?

"Dividamos BE por su punto medio F, y tracemos FG y AG respectivamente paralelas a AB y FB; el paralelogramo AGFB será igual al triángulo AEB ya que GF corta a AE en su punto medio I, y si, por otra parte, se prolongan las líneas del triángulo AEB hasta GIF, el agregado de todas las paralelas contenidas en el cuadrilátero será igual al agregado de las paralelas comprendidas en el triángulo AEB[16]*: en efecto las paralelas del triángulo IEF son equivalentes a las del triángulo GIA, y las que contiene el trapecio AIFB son comunes. Como a todos los instantes, tomados uno a uno, del intervalo de tiempo AB corresponden todos los puntos, tomados uno a uno de la línea AB, y como las paralelas trazadas a partir de estos puntos en el interior del triángulo AEB representan los grados crecientes de la velocidad que aumenta, mientras que las paralelas contenidas en el paralelogramo representarán tantos grados de una velocidad no creciente; parece que son empleados tantos momentos de velocidad en el movimiento acelerado según las paralelas crecientes del triángulo AEB como en el movimiento uniforme según las paralelas del paralelogramo GB*[17] *en efecto; los momentos que faltan en la primera mitad del movimiento acelerado (es decir los que representan las paralelas del triángulo AGI) se compensan con los momentos que representan las paralelas del triángulo IEF. Por lo tanto está claro que las distancias iguales serán atravesadas en tiempos iguales por dos móviles, uno de los cuales, par-*

[15] *Opere*, VIII, 208; *Discours*, 139-140.
[16] En estas líneas, hemos preferido utilizar el término de "agregado" antes que el de "suma" que se encuentra en la traducción de Maurice Clavelin: "[...] quod si parallelae trianguli AEB usque ad IG extendatur, habemus aggregatum parallelarum omnium in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo AEB", *Opere*, VIII, 208-209.
[17] Hemos modificado ligeramente la traducción hecha por Maurice Clavelin. Además se debe remarcar que Galileo introduce la expresión "momento de velocidad" en lugar de "grado de velocidad". Incluso si estas dos expresiones son muy a menudo sinónimas en los textos galileanos, esta sustitución, en este punto del razonamiento no deja de ser un poco problemática.

tiendo del reposo, se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, y el otro, animado con un movimiento uniforme, se desplaza con un momento de velocidad igual a la mitad del mayor momento de velocidad alcanzado por el primero. C.Q.F.D." [18]

Para comparar los espacios recorridos, Galileo pone en juego pues un razonamiento que se apoya en la comparación de dos agregados de paralelas comprendidas en dos figuras iguales, por una parte, el paralelogramo AGFB y, por otra, el triángulo AEB.

Además, el agregado de todas las paralelas comprendidas en el triángulo AEB representa el agregado de todos los grados de velocidad de un movimiento uniformemente acelerado mientras que el agregado de todas las paralelas comprendidas en el paralelogramo AGFB representa el agregado de todos los grados de velocidad de un movimiento uniforme. En consecuencia, los agregados de los grados de velocidad en uno y otro movimiento son los mismos:

> *"El paralelogramo AGFB será igual al triángulo AEB ya que GF corta a AE en su punto medio I, y si, por otra parte, se prolongan las líneas del triángulo AEB hasta GIF, el agregado de todas las paralelas contenidas en el cuadrilátero será igual al agregado de las paralelas comprendidas en el triángulo AEB"*.[19]

¿Cómo pasar ahora de la comparación de estos agregados a la de los espacios recorridos?

Para Galileo, este paso "está claro". Sin embargo no lo está verdaderamente a menos que se precise, lo que no se hace explícitamente, en qué relación matemática están los agregados de los grados de velocidad con los espacios recorridos, de tal manera que si esta relación es la de proporcionalidad, solamente entonces, de la igualdad de los agregados se puede concluir la igualdad de los espacios recorridos [20] y por lo tanto que, en efecto, *"distancias iguales serán atravesadas en tiempos iguales por dos móviles, uno de los cuales, partiendo del reposo, se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, y el otro, animado con un movimiento uniforme, se desplaza con un momento de velocidad igual a la mitad del mayor momento de velocidad alcanzado por el primero"*.

---

[18] *Opere,*VIII, 208-209; *Discours,* 140.
[19] *Opere,*VIII; *Discours,* 140.
[20] Sobre estas mismas dificultades, ver Maurice Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée* (París, Colin, 1968), 309-310; Jacques Merleau-Ponty, *Leçons sur la genèse des théories physiques* (París, Vrin, 1974), 50-51 y Alexandre Koyré, *Etudes galiléennes* (París, Hermann, 1966 y 1980), 149 y sig. Se puede consultar también P. Galluzzi, *Momento. Studi galileiani* (Roma, 1979); E. Giusti, "Aspetti matematici della cinematica galileiana", *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche,* (1981), 32 y A. Nardi, "La quadratura della velocità. Galileo, Mersenne, La tradizione", *Nuncius* (1988), 27-64.

Establecido este resultado, el Teorema II de la tercera jornada de los *Discorsi*, que establece que *"los espacios recorridos en tiempos cualesquiera por el mismo móvil están entre ellos en razón doble de los tiempos, es decir como los cuadrados de estos mismos tiempos"*[21], enseguida se deduce fácilmente en el marco de la geometría euclidiana.

De estas dos demostraciones galileanas se sigue entre otras cosas:

- Por una parte que el crecimiento de la velocidad es continuo a partir del reposo inicial,
- Por otra que el paso del agregado de todas las velocidades al espacio recorrido se hace, esencialmente, sobre la base de las expresiones galileanas *"es muy razonable y probable"* (*Dialogo*) y *"está por lo tanto claro" (Discorsi)*.

Estas son las afirmaciones del análisis galileano que serán objeto de las críticas de Edme Mariotte (1620-1684) y de Pierre Varignon (1654-1722).

2) LAS CRÍTICAS DE LA LEY GALILEANA

2.1 Las críticas de Edme Mariotte

Las críticas de Mariotte se refieren al análisis galileano del principio del movimiento y al crecimiento continuo del la velocidad. ¿El movimiento de caída de los graves pasa, como afirma Galileo en el *Dialogo* y en los *Discorsi*, por todos los grados de velocidad a partir del reposo?

Mariotte formula sus críticas en una Memoria leída en la asamblea de la Academia el 31 de Julio de 1677. Se lee en ella desde las primeras líneas:

> Lema Iº
>
> *Los cuerpos que caen por su propio peso en el aire libre, comienzan su caída con una velocidad determinada bastante considerable y no pasan por todos los grados de lentitud"*.[22]

Sigue entonces una especie de demostración experimental que se apoya en el estudio de los movimientos de los platillos de una balanza:

---

[21] *Opere*, VIII, 209-210; *Discours* 140-141.

[22] *Archivos de la Academia de ciencias de París; Registros manuscritos de las Actas de las sesiones de la Academia Real de ciencias de París*, t. 7, fol 118 rº. (en lo que sigue *Registros*).

> *"Sea una balanza rígida e inflexible BAC cuyo brazo AC sea 50 veces mayor que el brazo AB, es evidente que si se suspende en el punto B, el peso D de 50 onzas, y en el punto C el peso E de 2 onzas, este último peso descenderá, y hará elevar el peso D. Sea otro peso F igual al peso E, y que se le deja caer al mismo tiempo que el peso E no comenzará su caída con una velocidad menor que la del peso E sino que será igual o mayor, y puesto que la balanza es inflexible, el peso E no puede moverse descendiendo a menos que el peso D se mueva subiendo, y que no se mueve 50 veces más rápido, por lo tanto el peso E no pasará por ese grado de lentitud, ni por todos los otros entre dos. Y si el brazo AC, es cien veces más grande que el brazo AB, habrá aún un mayor número de grados de lentitud, por los cuales el peso E no pasará, y así hasta el infinito, en consecuencia hay una infinidad de grados de lentitud por los que el peso E no pasa en su descenso, dado que comienza su caída con una velocidad igual o mayor que la del peso E, en consecuencia comienza a descender con una velocidad determinada, y bastante considerable, lo que era preciso demostrar".*[23]

Así, un cuerpo en caída libre, al principio de su movimiento, no pasa por todos los grados de velocidad, sino, al contrario, comienza su movimiento con una velocidad "determinada bastante considerable".

Ya, en 1673, en su *Traité de la percusión ou choq des corps*, Mariotte escribía en términos parecidos:

> *"Un cuerpo que cae libremente comienza a caer con una velocidad determinada, y que no es infinitamente pequeña; es decir, que es tal que puede haber menores en diferentes grados".*[24]

En este mismo *Traité de la percusión*, Mariotte, algunas páginas más adelante, vuelve sobre esta cuestión asociando entonces a su crítica reflexiones que se apoyan en las célebres paradojas de Zenón de Elea relativas a la continuidad del movimiento:

> *"Galileo hace algunos razonamientos bastante verosímiles para probar que en el primer momento en el que un peso comienza a caer, su*

[23] *Ibid.*, 118 vº - 119 rº. F comienza su caída con una velocidad igual o mayor a la de E (se da por supuesto que el movimiento comienza con una velocidad inicial); por tanto E, debido a la estructura de la balanza se desplaza más más rápido que B (o D), y así, F no pasa por todos los grados de lentitud.

[24] Mariotte, *Traité de la percusión ou choq des corps. Dans lequel les principales Regles du mouvement contraires à celles de Mr. Descartes, et quelques autres modernes ont voulu établir, sont démonstrées par leurs véritables causes* (París,1673). Esta obra será, con algunas modificaciones, reeditada en numerosas ocasiones, desapareciendo el nombre de Descartes del título. Retomado igualmente en Oeuvres de Mr. Mariotte, 2 vol. (Leyde, 1717), I, 77. La Proposición XI de la edición de 1717 corresponde a la Proposición X de la edición de 1673.

velocidad es más pequeña que cualquiera que se pueda determinar: pero estos razonamientos están basados en la división al infinito, tantas velocidades como espacios recorridos, y tiempos de caídas, que son razonamientos muy sospechosos, como el que los antiguos usaban para probar que Aquiles jamás podría atrapar a una tortuga, el cual es difícil de responder y de dar la solución, pero del que se demuestra su falsedad por la experiencia y por otros razonamientos más fáciles de concebir. Así se le objetará a Galileo los razonamientos anteriores que son fáciles de concebir, particularmente el de la balanza, y que son mucho más claros que los suyos, fundados sobre la división al infinito, que son inconcebibles, y sobre ciertas reglas de la aceleración y de la velocidad de los cuerpos, que son dudosas: pues no se puede saber si el cuerpo que cae no pasa un pequeño espacio, sin acelerar su primer movimiento, debido a que es necesario tiempo para producir la mayor parte de los efectos naturales, como al parecer ocurre cuando se hace pasar un papel a través de una gran llama, a gran velocidad, sin que se queme; y en consecuencia se debe preferir estos últimos razonamientos a los de Galileo".[25]

Una cierta evidencia experimental es pues afirmada por Mariotte contra la continuidad del movimiento y el crecimiento de la velocidad a partir del reposo. Todo el trabajo galileano de matematización del movimiento es aquí criticado en nombre de un empirismo ilusorio.

2.2. El esfuerzo deductivo de Varignon

El objeto del trabajo varignoniano sobre la ley galileana de la caída de los graves es muy diferente al de Mariotte. Para Varignon se trata de dar a la demostración galileana una verdadera perfección demostrativa, es decir, dar finalmente cuenta de las expresiones "es muy razonable y probable" y "está por tanto claro".

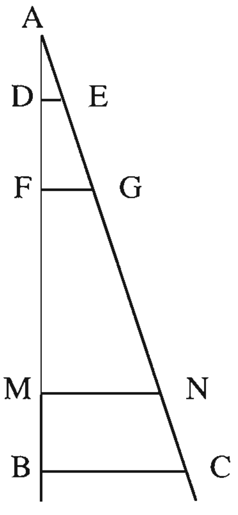
Es pues en la sesión de la Academia Real de Ciencias del sábado 19 de enero de 1692 donde Varignon se propone "demostrar" "la opinión de Galileo referente a los espacios que recorren los cuerpos que caen".[26] Es preciso entender aquí "demostrar" en un sentido fuerte pues para Varignon se trata de dar cuenta del resultado galileano o de demostrarlo "en general", es decir de darle una perfección demostrativa idéntica a aquella de la que parece revestida la geometría euclidiana:

[25] *Traité de la percusión* (París, 1673), 247-249 y Oeuvres, I, 80-81.

[26] *Registros*, t. 13, fol 76r^{o} - 77v^{o}, y *Historia de la Academia Real de ciencias*, 2 vol. París 1733, 155-157 (en lo que sigue, *Historia*, II).

"Galileo supone que las velocidades de los cuerpos que caen, aumentan, como los tiempos de su caída; y de ahí ha encontrado que los espacios que estos cuerpos recorren mientras caen siguen la razón de los cuadrados de los tiempos que emplean en recorrerlos, pero no lo ha probado sino por inducción, y no en general. He aquí como el habría podido hacer, incluso siguiendo sus propios principios".[27]

Puesto que Varignon se propone "demostrar" los resultados galileanos utilizando los mismos principios de Galileo, ¿cómo va a conseguir dar cuenta de las imprecisiones galileanas?



Historia de la Academia Real
(París, 1733, II, 156)

"Supongamos que AB expresa el tiempo que se quiera de la caída de un cuerpo. Puesto que (hip.) las velocidades de este cuerpo que cae siguen la razón de los tiempos de su caída, es evidente que si DE expresa la velocidad adquirida en cualquier parte AB de este tiempo, su paralela FG expresará también la velocidad del cuerpo al final del tiempo AF puesto que DE es a FG como AD es a AF. Por la misma razón, HK expresará la velocidad de este cuerpo al final del tiempo AH[28]*; y así en todas las partes imaginables del tiempo*

[27] *Registros*, t. 13, fol. 76rº. En *Historia*, II,155, la última frase se transforma en: "M. Varignon hace ver cómo lo podría haber hecho, pero siguiendo sus propios principios".
[28] En la figura que acompaña al manuscrito, se encuentra la paralela suplementaria HK entre FG y MN.

> *AB hasta BC que expresará la velocidad de todo este cuerpo hasta el fin de todo este tiempo. Si, por lo tanto, en todos los puntos de la línea AB se imaginan paralelas a BC, cada una expresará la velocidad del cuerpo al final de cada uno de los tiempos expresados por las partes AB, tomadas desde A hasta cada uno de esos puntos".*[29]

Siendo así, Varignon no considera como Galileo el agregado sino, por un deslizamiento conceptual susceptible de reintroducir implícitamente los problemas relativos a la composición del continuo y marcado por el abandono de la previamente establecida igualdad de figuras geométricas (el triángulo y el rectángulo de Galileo), la "suma de todas estas paralelas":

> *"Por lo tanto la suma de todas estas paralelas expresará la suma de todas las velocidades que el cuerpo ha tenido en todos los instantes de su caída".*[30]

Se sigue entonces:

> *"Por ejemplo la suma de todas las líneas paralelas a BC que están en el triángulo BAC representará la suma de las velocidades que el cuerpo ha tenido en todos los instantes del tiempo AB; de la misma manera la suma de las paralelas comprendidas en el triángulo MAN, representará la suma de todas las velocidades que el cuerpo ha tenido en todos los instantes del tiempo AM, y así por lo demás".*[31]

Habiendo reemplazado las "sumas" varignonianas , desde cierto punto de vista, a los agregados galileanos, Varignon puede entonces escribir simplemente, pero con poco rigor, que *"suponiendo estas líneas infinitamente próximas*[32] *las unas de las otras, es evidente que sus sumas son como las superficies de los triángulos ABC, AMN,* etc..."[33]. Y, en consecuencia, *"la suma de las velocidades que el cuerpo tiene mientras cae en el tiempo AB, es a la que tiene mientras cae en el tiempo AM como ABC es a AMN"*[34]. Ahora bien, siendo los dos triángulos ABC

---

[29] *Registros*, t. 13, fol. 76vº. Hay algunas ligeras modificaciones en *Historia*, II, 156.
- Sea AB una línea cualquiera que expresa el tiempo que se quiera de la caída de un cuerpo, puesto que por la hipótesis de las velocidades de este cuerpo [...]",
-"[...] y así en todas las otras partes imaginables del tiempo AB hasta BC que expresará toda la velocidad de este cuerpo al final de todo este tiempo [...]".

[30] *Registros*, t.13, fol. 77rº e *Historia*, II, 156.

[31] Ibid.

[32] En *Historia*, II, 156, dice "infinitamente próximo".

[33] *Registros*, t. 13, fol. 77rº.

[34] *Ibid.*

y AMN semejantes, la razón entre sus áreas es como la de AB^2 a AM^2 [35], es decir como la razón entre los cuadrados de los tiempos "empleados en caer"; de donde finalmente:

> *"Así las sumas de las velocidades que un cuerpo tiene en todos los instantes de su caída son como los cuadrados de los tiempos que ha empleado en caer".*[36]

Varignon ha establecido por lo tanto el resultado según el cual las "sumas de las velocidades" están entre si como los cuadrados de los tiempos. ¿Cómo llegará ahora a expresar que los espacios están entre si como los cuadrados de los tiempos, es decir, cómo va a construir una relación que permita pasar de las "sumas de las velocidades" a los espacios recorridos?

A la expresión galileana "está por lo tanto claro", Varignon responde con la introducción de un principio, fundado según él en la razón, a saber que "los efectos son siempre proporcionales a sus causas":

> *"Ahora bien (siendo siempre los efectos proporcionales a sus causas) es evidente que los espacios que los cuerpos recorren cuando caen, están entre si como la suma de sus velocidades*[37]*, pues también están entre si como los cuadrados de los tiempos que estos cuerpos emplean en caer, lo que era preciso demostrar".*[38]

Varignon toma, según toda verosimilitud, su principio de John Wallis. En efecto, este último, en su Proposición 7 de la primera parte de su *Mechanica sive de motu tractatus geometricus* (Londres, 1670-1671), escribe: *"Los efectos son proporcionales a sus causas adecuadas"*[39], y comenta a continuación esta proposición en un breve Escolio: *"He estimado que era preciso hacer una premisa de esta proposición universal puesto que abre la vía por la que se pasa de la pura especulación matemática a la física; o más bien es la que relaciona a la una con la otra"*[40]. De esta manera esta proposición universal sirve a Varignon, como sugiere Wallis, para pasar de la pura especulación matemática la cual consiste aquí en la

---

[35] *Ibid.*

[36] *Ibid.*, fol. 77 rº - 77 vº.

[37] "suma de", olvidada inicialmente, ha sido añadida entre las líneas del manuscrito por la misma mano. Se lee en *Historia*, II, 157: "[...] cayendo son como la suma de las velocidades". Además, a pesar de que el principio enunciado aquí sea muy clásico adquiere, como veremos en las líneas siguientes, con Varignon y Wallis un estatus específico ligado al proceso de la matematización.

[38] *Registros*, t. 13 fol. 77 vº.

[39] "Effectus sunt causis suis adaequatis proportionales", *Mechanica sive de motu tractatus geometricus*, (Londres, 1670-1671), en *Opera Mathematica*, 3 vol. (Oxford, 1693-1699), I, (1695), 584.

[40] "Universalem hanc Propositionem praemittendum etiam duxi, quoniam viam aperit qua, ex pure Mathematica speculatione, ad Physicam transeatur; sen potius hanc et illiam connectit" *Ibid*, I (1695), 584.

obtención de la suma de todas las líneas o de todas las velocidades, a la física, es decir a la observación de un espacio recorrido en tanto que este espacio recorrido es un efecto físico del cual la suma de todas las velocidades es la razón matemática. Para Varignon , la ley galileana pasa pues del registro de la física experimental al de la física matemática o, si se quiere, es pasada a un registro donde la exigencia de matematización se encuentra plenamente satisfecha.

El tratamiento "a la manera" galileana de la evolución "sin saltos", "pausas" o discontinuidades del movimiento aparece en el siglo XVII como el resultado de una elección teórica arriesgada pero decisiva pues, como Galileo y Varignon lo han percibido perfectamente, es la posibilidad misma de la geometrización del movimiento lo que está aquí en juego. El tratamiento geométrico del movimiento requiere superar por medio de la construcción racional, pero con los riesgos del infinito, lo que, en Mariotte no es sino una especie de evidencia experimental que no aporta nada.

Traducido del francés por *Carlos Mederos Martín.*
Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia