MATEMÁTICAS Y PERSPECTIVA

CARLOS MEDEROS MARTÍN
I.E.S. Viera y Clavijo y FCOHC.

INTRODUCCIÓN

Se suele usar el término *perspectiva* para describir las técnicas de representación del espacio tridimensional sobre una superficie plana que surgieron, fundamentalmente, en Florencia, durante el siglo XV. Ahora bien, si queremos representar gráficamente alguna entidad física, debemos tener una *concepción* (una imagen mental) previa de la misma. En consecuencia, surgen inmediatamente preguntas como: ¿cuál era la idea de espacio que tenían los artistas del Quattrocento? Por ejemplo, en la introducción de los *Principia Mathematica* de Isaac Newton, publicado en 1686, encontramos la siguiente observación sobre el espacio:

> «El espacio absoluto permanece igual e inmóvil, en virtud de su naturaleza, y sin referencia a ningún objeto exterior»

y un poco más adelante:

> «El lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa»

Es decir, el espacio es una especie de «receptáculo» en el que están contenidos los objetos, y que además, debe ser homogéneo, transparente e infinito. Es en este «receptáculo» donde se desarrollan las teorías científicas que surgen durante los siglos XVI y XVII (Galileo, Newton, etc.). Estas brillantes teorías se caracterizan por ser a la vez matemáticas y experimentales. Es evidente que para poder compaginar estos dos aspectos se necesita disponer de una concepción del espacio (y del tiempo) muy particular, que nos permita representar de forma unitaria el mundo pensado y el experimentado; concepción, como la de Newton anteriormente presentada, en la que la geometría juega un papel primordial en lo referente a la representación del mismo.

¿Era, acaso, ésta la idea de espacio que tenían los artistas del Quattrocento? ¿O, por el contrario, estaban aún «encarcelados» en el cosmos finito y ordenado de Aristóteles?

En la elaboración de la concepción «moderna» del espacio participaron, desde luego, filósofos y científicos, pero el terreno había sido preparado por los pintores renacentistas, que durante la primera mitad del siglo XV desarrollaron en Florencia nuevas técnicas de representación, hasta tal punto innovadoras que, quizás, podamos afirmar que *lo que cambió no fue la forma de representar el espacio, sino la concepción misma del espacio.* En consecuencia, podemos afirmar que el paso de la representación medieval de un espacio heterogéneo, ligado a los cuerpos, a un espacio geometrizado, homogéneo e independiente de los cuerpos, a través del desarrollo de la perspectiva, es una cuestión que no sólo atañe a la historia del arte, sino también a la historia de la ciencia.

EL PROBLEMA DEL ESPACIO

Desde la antigüedad el problema del espacio se planteó, por una parte, como la oposición entre lo lleno y lo vacío; y por otra, entre el ser y el no ser. El presocrático Parménides niega que exista el no-ser y que se pueda hablar del no-ser, por lo tanto niega que se pueda hablar del vacío; sin embargo el atomista Demócrito afirma la existencia de los átomos y del vacío, siendo este último el «espacio» en el que se mueven «las cosas», es decir, los átomos. En Platón encontramos una referencia explícita a la noción de espacio en un pasaje del *Timeo* (52 A y sig.), del que podemos deducir que para este autor hay tres géneros de ser: uno que es accesible sólo por la razón, es invisible para los sentidos, que nada recibe de fuera ni se transforma en otra cosa y es indestructible e increado, son las *formas* o las *ideas*; otro que está siempre en movimiento, es creado perceptible por los sentidos sometido a la opinión y a la generación y corrupción, o sea, las *cosas sensibles*; y, por último, otro que es eterno y no susceptible de destrucción que constituye el habitáculo de las cosas creadas y que existe antes que éstas y que el cielo, es decir, el espacio, o lo que es lo mismo, el receptáculo que carece de figura, lo que hace que sólo lo podamos definir negativamente: es lo que propiamente no es, sino que únicamente puede ser llenado.

Sin embargo, durante la Edad Media se impuso la visión geocéntrica y «finitista» del cosmos de Aristóteles, limitado por la esfera de las estrellas fijas. En ese espacio es en el que se desarrolla la geometría de Euclides, donde la línea recta se corresponde con lo que hoy llamamos «segmento», las superficies planas siempre están limitadas por un contorno, y los volúmenes por una superficie. Esto significa que la geometría de Euclides trata con objetos limitados o finitos, pero que pueden ser prolongados indefinidamente; es decir, objetos que son «potencialmente» infinitos, pero no «actualmente» infinitos, tal como podríamos entender en la actualidad los conceptos de recta, plano, etc. Además, una figura geométrica, un triángulo, por ejemplo, es considerada como una forma pura en sí misma e inmóvil, no como una figura formada por la intersección de líneas inmersas en un espacio absoluto e infinito; lo que nos conduce a una geometría «plástica», basada en la forma. Estas características se pueden observar en el enunciado del famoso quinto postulado de los *Elementos*, también conocido como Axioma de las Paralelas:

> «Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos»

¿Y qué ocurrirá si los dos ángulos internos son iguales a dos rectos? ¿Se encontrarán las rectas en algún punto? Evidentemente estas preguntas no tienen ningún sentido en una geometría ligada a un *cosmos* limitado por la *esfera de las estrellas fijas*.

Por otra parte, la teoría aristotélica del «lugar» termina con las especulaciones de la filosofía presocrática sobre el infinito, definiendo el espacio como un «accidente» de los cuerpos, de manera que no es un receptáculo que contiene a los cuerpos, sino una propiedad de éstos. El espacio es el conjunto de lugares ocupados por los cuerpos, y no existe por sí mismo, sino que depende de los cuerpos: *si no hay cuerpos no hay espacio.*

A finales de la Edad Media surgen nuevas concepciones sobre el Universo. Podemos destacar la figura de Nicolás de Oresme (1320-1382), representante de la escuela conocida como los *físicos parisinos,* que manifestaron gran interés por las matemáticas. Oresme es considerado como precursor de Copérnico, al afirmar que la razón no nos proporciona ningún método para discernir si es la Tierra la que gira en el cielo, o por el contrario, el cielo el que gira alrededor de la Tierra; como precursor de Descartes, atribuyéndosele la invención de las coordenadas matemáticas; y como precursor de Galileo, al plantearse el establecimiento de leyes que rigen el movimiento de los cuerpos. Siguiendo la tendencia medieval de *cuantificar* las *cualidades,* Oresme expone en un tratado, cuyo manuscrito no tiene título, la teoría *De latitudibus formarum,* por medio de la que pretende describir, de una forma geométrica, las variaciones de la intensidad (*intensio et remissio*) de las cualidades; es decir, introduce la representación gráfica en el estudio de la Naturaleza. En la primera parte de este tratado describe cómo se realiza la representación gráfica de la distintas formas de una sustancia: se considera en una línea horizontal la extensión de las cualidades (*longitudo*) y se levanta en cada punto de la misma líneas verticales, cuya altura (*latitudo*) será proporcional a la intensidad (*intensio*) de la cualidad en ese punto, obteniendose así una figura que, según su forma, representa diferentes tipos de variación de las cualidades: un rectángulo representa una cualidad uniforme, un triángulo «una cualidad uniformemente deforme que termina en intensidad nula», un trapecio «una cualidad uniformemente deforme terminada en ambas partes en cierto grado», una curva representa una cualidad «difformitter difformis». Este tipo de planteamientos nos permite pensar que en Europa se había empezado a considerar el mundo en términos de *cantidades* en sustitución de las *cualidades.*

Otra gran figura del pensamiento de finales de la Edad Media es Nicolás de Cusa (1401-1464), autor de *De docta ignorantia*, redactada en 1440, y donde podemos encontrar cuestionada por primera vez la cosmología medieval, al afirmar la infinitud del universo. Infinitud en la que los opuestos se confunden. Por ejemplo, lo «recto» y lo «curvo» son conceptos opuestos en geometría; sin embargo, si consideramos una circunferencia de radio infinito, la curva se confunde con la tangente, es decir, con la recta. Dado que nuestro conocimiento racional se basa en la distinción clara entre los opuestos, lo que sólo es posible en el dominio de lo finito, si afirmamos, como Nicolás de Cusa, la infinitud del universo, llegamos al convencimiento de nuestra incapacidad para crear una representación objetiva del mismo, tarea que, por supuesto, sólo está al alcance de Dios. Llegados a este convencimiento, podemos afirmar que hemos alcanzado la *docta ignorantia*; actitud que nos permite, teniendo en cuenta las limitaciones de nuestra mente finita, adquirir conocimiento por medio de la cuantificación: «Pensad en la precisión porque Dios es la precisión absoluta misma y la mente es una medida viva que alcanza su propia capacidad midiendo otras cosas», escribió Nicolás de Cusa en *El Idiota*, uno de sus diálogos. Encontramos aquí la idea de un Dios Geómetra con atributos infinitos en un espacio también infinito.

En el otoño de 1584 se publica en Londres *De l'infinito universo e mondi* de Giordano Bruno (1548-1600), en donde leemos:

> «*No hay confines, términos límites o muros que nos roben o priven de la infinita multitud de cosas*. Por consiguiente, la tierra y el océano que hay en ella son fecundos [...]. Así, Demócrito y Epicuro, quienes mantenían que todo sufría restauración y renovación por el infinito, comprendían estas cuestiones mejor que quienes mantienen a toda costa la creencia en la inmutabilidad del universo [...]».

Así pues, las esferas celestes estallan en mil pedazos para dar paso a un universo cambiante, eterno e infinito, inaccesible e irrepresentable para los sentidos, pero que resulta ser el concepto primario y más cierto para el intelecto:

> «Ningún sentido ve el infinito; a ningún sentido se le puede exigir esa conclusión, porque el infinito no puede ser objeto del sentido. Por eso quien pide conocerlo por medio del sentido se parece a quien pretendiera ver la sustancia y la esencia con los ojos y quien negara la cosa porque no es sensible o visible vendría a negar la propia sustancia y el propio ser. Por eso debe de haber un procedimiento a la hora de pedir testimonio al sentido y no hemos de darle lugar más que en las cosas sensibles y eso no sin reservas si no entra a juzgar unido a la razón. *Es al intelecto a quien conviene juzgar y dar razón de las cosas ausentes y separadas por distancia de tiempo e intervalo de espacio*. Y en el presente problema nos basta y tenemos suficiente testimonio del sentido, por cuanto es incapaz de contradecirnos y además hace evidente y confiesa su debilidad e insuficiencia al causar por medio del *horizonte la apariencia de finitud, en cuya formación se ve además lo muy inconstante que es*».

El horizonte percibido por los sentidos, que no producen conocimiento cierto, nos lleva a la falsa conclusión de que el universo es finito. Por el contrario, si permitimos al intelecto (es decir, a la *geometría*) *juzgar y dar razón de las cosas separadas por distancia de tiempo e intervalo de espacio,* obtenemos el horizonte de los pintores renacentistas, lugar donde se cortan «en acto» las rectas paralelas, es decir, el infinito.

Descartes (1596-1650) distingue las «categorías del ser» en *substancias* y *modos*; y los modos en *atributos* y *accidentes*. Los atributos son los modos de ser *esenciales* de la substancia. Entre todas las cosas producidas hay sólo dos que para su existencia únicamente necesitan de Dios: El espíritu (alma, yo) o substancia que piensa y el cuerpo o substancia extensa. La extensión es para Descartes la esencia de los cuerpos; es el último substrato que queda después de abstraer los accidentes secundarios. Pero la extensión es multiplicidad (número) y continuidad (segmento), que son los componentes esenciales del Álgebra y la Geometría (de la Matemática), lo que explica la tendencia a la *geometrización* del mundo como característica fundamental del pensamiento moderno. Usando segmentos y números, Descartes define un sistema de coordenadas que «cuadricula» el espacio. De la misma manera que en la filosofía de Aristóteles un cuerpo creaba el «lugar» (espacio) donde se encuentra, este sistema de coordenadas crea un «lugar» infinito, vacío, homogéneo..., es decir, el espacio. Pero esto no es nuevo, ya lo habían hecho los pintores renacentistas, los cuales dibujaban, usando la perspectiva, una habitación con el suelo «cuadriculado» que cumplía el mismo cometido que el sistema de referencia de Descartes: crear un espacio matemático en el que se desarrollaban las historias que pretendían narrar.

Para Spinoza (1632-1677) *substancia* es «lo que existe en sí y se concibe por sí». Por lo tanto sólo existe una substancia que es la causa inmanente de todas las cosas. Esta substancia, causa de sí misma, es una e indefinida, y Spinoza la llama indistintamente Naturaleza o Dios. En segundo lugar define el concepto de *atributo*: «aquello que la inteligencia descubre en la substancia constituyendo su esencia». A la substancia única le corresponden, como ser con realidad infinita (*infinita omnimode*) infinitos atributos; pero de estos atributos de la Divinidad el espíritu humano sólo puede conocer dos: el *Pensamiento* y la *Extensión*. De este modo la Extensión, y por consiguiente el espacio, se diviniza, es decir, se convierte en un atributo de la Divinidad, asumiendo, al mismo tiempo, otros atributos divinos, como la infinitud.

Por último, es este el espacio que Isaac Newton somete a la Ley de la Gravitación Universal y, desde luego, podemos afirmar que en su gestación desempeñaron un papel importante los arquitectos y pintores del Renacimiento, al idear un espacio homogéneo que luego sería geometrizado.

ESPACIO Y PINTURA EN LA EDAD MEDIA

Se suele «acusar» a la pintura medieval de «ingenua», de usar técnicas de representación muy poco elaboradas y de no reflejar fielmente la «realidad» del espacio. Por otra parte, los constructores medievales eran capaces de diseñar y construir maravillosas catedrales góticas. Aparentemente, esto es una contradicción, pero sólo aparentemente, pues basta recordar la noción de espacio que imperaba durante la Edad Media, siguiendo la tradición aristotélica: el espacio es el lugar ocupado por los cuerpos, es decir, un accidente de los mismos, y por lo tanto posterior a ellos. De esta manera una catedral es un objeto que, una vez construido, crea un espacio en el que, por cierto, podemos observar el impresionante conjunto de rectas *paralelas verticales* formado por sus columnas que confluirán en el infinito; un infinito que está muy por encima de nosotros, pobres mortales, y que parece aplastarnos contra el suelo. En cambio un pintor, cuando realiza un cuadro, no se plantea representar el espacio, dado que éste no existe con anterioridad a los objetos, en todo caso representará los objetos sin más. Dado que no existe un espacio independiente de los cuerpos en el que estos estén contenidos, y con respecto al cual éstos puedan situarse, las relaciones entre ellos no serán del tipo de las posiciones espaciales, tamaños relativos, proporciones, etc., sino de otro tipo: jerárquicas, morales, didácticas; por ejemplo, el tamaño de las personas no dependerá de su posición dentro del cuadro sino de su importancia social o moral. En consecuencia no existe una posición privilegiada del observador, o más bien, no existe un observador (humano); por lo que los objetos pueden representarse vistos desde donde mejor se aprecien sus cualidades esenciales. Por ejemplo, los platos se verán circulares encima de la mesa (los platos son esencialmente circulares), como si mirásemos desde arriba, mientras que los comensales se ven en alzado (es esencial ver el rostro para reconocer a las personas), como si mirásemos de lado. Una escena de estas características sólo puede ser vista por alguien que tenga el don de la ubicuidad, alguien que pueda estar en todas partes al mismo tiempo. Esto sólo lo puede hacer la mirada de Dios.

PLATÓN LLEGA A FLORENCIA

En el siglo XV surge en Florencia una Academia patrocinada por Cosme de Médicis, uno de cuyos maestros fue el filósofo bizantino Gemisto Pletón (1360-1452) , quien escribió una obra titulada *Diferencias entre la filosofía aristotélica y la platónica* en la que se ponía de manifiesto la superioridad de esta última. La Academia fue dirigida por Marsilio Ficino (1433-1499), traductor y comentarista de la obra de Platón, Plotino y otros neoplatónicos, así como de los libros relacionados con la *tradición hermética*. De este modo, partiendo de Florencia, se extiende por toda Italia un ambiente intelectual en el que en que renació la idea de que «*los números nos conducen al conocimiento cierto y que la Geometría es conocimiento de lo que existe siempre*».

Entre los que visitaron la Academia podemos destacar a Nicolás de Cusa, que había planteado la infinitud del espacio y el uso del cálculo y la medida como vías para acercarnos a la precisión en el conocimiento, «*asemejándonos de esta manera a Dios, que es la Precisión Absoluta*». También visitaron la Academia León Battista Alberti y Piero della Francesca, quienes desempeñaron un papel fundamental en el desarrollo de las técnicas de la perspectiva, después de haber estado en contacto con la concepción platónica del espacio y su visión del uso de la matemática en la adquisición del conocimiento.

Llegados a este punto, resulta interesante plantear cuál es la posición de Platón con respecto al arte en general, y en particular, con respecto a la pintura. El libro X de *La República* está prácticamente dedicado a esta cuestión. Así, podemos leer el siguiente diálogo de Sócrates con sus interlocutores:

> «-Fíjate ahora en lo que voy a decir. ¿Qué es lo que se propone la pintura? ¿Es representar lo que es, tal como es, o lo que parece, tal como parece? La pintura, ¿es la imitación de la apariencia o de la realidad?
> -De la apariencia.
> -El arte de imitar está, por consiguiente, muy distante de lo verdadero, y si ejecuta tantas cosas es porque no toma sino una pequeña parte de cada una; y aun esta pequeña parte no es más que un fantasma. El pintor, por ejemplo, nos representará un zapatero, un carpintero o cualquier otro artesano, sin conocer nada de estos oficios. A pesar de esto, si es un excelente pintor, alucinará a los niños y al vulgo ignorante, mostrándoles de lejos el carpintero que haya pintado, de suerte que tomarán la imitación por la verdad.
> -Seguramente.
> [...]
> -Por otra parte, ¿sobre qué facultad del hombre ejerce la imitación el poder que tiene?
> -¿De qué quieres hablar?
> -Vas a saberlo. *¿No es cierto que el mismo grandor mirado de cerca o de lejos no parece igual?*

-Si.
-¿No lo es, asimismo, que lo que parece derecho o torcido, convexo o cóncavo, visto fuera del agua, no parece lo mismo cuando se ve dentro de ella, a causa de la ilusión que los colores producen en los sentidos, lo cual ocasiona evidentemente una gran perturbación en el alma? Pues bien, a esta disposición de nuestra naturaleza es a la que el arte del dibujo, el de los charlatanes y otros semejantes tienden los lazos, sin olvidar ningún artificio que pueda valer para seducirla.
-Tienes razón.
-¿Se ha encontrado contra esta ilusión preservativo más seguro que la medida, el número y el peso, para impedir que la relación de los sentidos, tocante a lo que es más o menos grande, más o menos numeroso, más o menos pesado, prevaleciese sobre el juicio de la parte del alma que calcula, que pesa y que mide?
-No.
-Todas estas operaciones, ¿no son competencia de la razón?
-Si.
-Pero cuando un hombre ha medido bien una cosa, y ha reconocido que es más grande, más pequeña o igual, se dan entonces en nosotros dos juicios opuestos, relativos a las mismas cosas.
-Si.
-¿Y no hemos dicho que era imposible que la misma facultad del alma formase al mismo tiempo y sobre la misma cosa dos juicios contrarios?
-Si, y hemos tenido razón para decirlo.
-Por consiguiente, lo que juzga en nosotros sin consideración a la medida es diferente de lo que juzga conforme a la medida.
-Sin duda.
-*Pero la facultad que hace relación a la medida y al cálculo es la parte mejor del alma.*
-Sin contradicción.
-Luego la facultad opuesta es alguna cosa inferior en nosotros.
-Es preciso que así sea.
-A esta confesión quería conduciros cuando decía que, de una parte, la pintura, y en general todo arte que consiste en la imitación, está muy distante de la verdad en todo lo que ejecuta; y que, de otra, esta parte de nosotros mismos con la que el arte de imitar está en relación, se encuentra también muy distante de la sabiduría, y no inspira nada verdadero ni real.»

En resumen, la pintura imita la apariencia, no desvela la verdad, sino que la oculta; es decir, es una *mimesis,* o imitación de hechos sensibles, que a su vez son imágenes de las Ideas paradigmáticas; por lo tanto, la obra del pintor está alejada tres grados de la verdad. Esto significa que el arte se dirige a la parte más innoble de nuestra alma, a no ser que intervenga en la actividad del artista la parte mejor de la misma, que como sabemos es, según Platón, *la parte del alma que calcula, que pesa y que mide*; es decir, la que aplica las matemáticas para desvelar la verdad. Podemos afirmar que la forma de representar el espacio que se da en Florencia en el siglo XV surge como consecuencia de la combinación de la formación platónica de los pintores, con la concepción del espacio que ésta implica, junto a la idea de que ninguna actividad que no esté presidida por el uso de las matemáticas pueda acercarnos a la verdad.

Y fue así, posiblemente gracias a que Platón «llegó» a Florencia, como la pintura pasó de ser una mera imitación de la apariencia a ser una fuente de conocimiento verdadero sobre la Naturaleza, la cual ha quedado ahora sumergida en un espacio «platónico», infinito, homogéneo, anterior a los cuerpos, geometrizado y a cuyas leyes se debe plegar. El trabajo del científico consistirá ahora en obligar a la Naturaleza a que cumpla las leyes geométricas del espacio donde está contenida.

Ahora el pintor debe «crear» previamente sobre la superficie en la que trabaja ese espacio «preexistente» en el que se situarán posteriormente los objetos. En esta creación desempeñan un papel fundamental las antiguas teorías sobre la luz , la *visión humana* y las leyes de la geometría; de manera que el espacio resultante se materializa siendo percibido por un observador, que, como todos los demás objetos, ocupa una posición claramente determinada por métodos geométricos. Los objetos se verán ahora no como son, sino como son percibidos por este observador. Esta es la mirada del hombre.

Muchos son los artistas y pensadores que contribuyeron a esta «creación» del espacio moderno. Nos centraremos en tres personajes, cuyas obras pueden ser consideradas como un resumen de la misma, y en las que podremos apreciar maravillosas confluencias entre arte, geometría, mecánica, etc. Son los pintores Leon Battista Alberti y Piero della Francesca, y el ingeniero y geómetra Girard Desargues.

LEON BATTISTA ALBERTI

Leon Battista Alberti nació el 18 de febrero de 1404 en Génova. Hijo del banquero y comerciante Lorenzo di Benedetto Alberti. Desde niño estudia griego, latín, matemáticas, y educación física. En 1421 Leon Battista ingresa en la Universidad de Bolonia, donde estudia derecho canónico, se pone en contacto con las fuentes clásicas, especialmente Cicerón, y se interesa por la Lógica. En 1434 va a Florencia con el séquito que acompaña al papa Eugenio IV en su exilio de la curia pontificia romana, lo que, posiblemente, favoreció el contacto de Leon Battista con el ambiente neoplatónico que se había desarrollado en Florencia durante las primeras décadas del siglo XV, alrededor de la Academia florentina. Este contacto resulta fundamental para entender el significado de sus obras relacionadas con el arte, especialemente el tratado *De Pictura*, publicado en 1435 en latín y un año más tarde en su versión italiana *Della Pittura*.

Comienza Alberti la versión italiana de su tratado dedicándolo a su amigo el arquitecto Filippo Brunelleschi, que había sido uno de los precursores de la perspectiva. «Verás tres libros», le dice Alberti a Filippo, «el primero, todo matemático, de las raíces de dentro de la Naturaleza hace surgir este legendario y nobilísimo arte [...]».

En efecto, en el libro I de *Della Pittura* Alberti expone, sin usar ninguna figura, su método para representar geométricamente el espacio tridimensional, partiendo de las teorías existentes sobre la visión. Desde el principio podemos observar cierta inspiración platónica:

> «Al escribir sobre pintura en estos brevísimos comentarios, a fin de que nuestro discurso sea más claro, primero cogeremos de los matemáticos aquellas cosas que nos parezcan a propósito. Una vez entendidas tales cosas, según nos permita el ingenio, hablaremos de la pintura desde los mismos principios de la naturaleza. Pero en todo nuestro discurso, quiero que se advierta que hablaré de tales cosas no como matemático, sino como pintor: *los matemáticos consideran sólo con el ingenio, separadas de toda materia, las especies y las formas de las cosas*».

A continuación establece las definiciones de punto, línea y superficie, que nos recuerdan vagamente a Euclides:

> «Así, es necesario en primer lugar saber que el punto es un signo, por así decirlo, que no se puede dividir en partes [...]. Y la línea para nosotros será un signo cuya longitud se podrá dividir en partes, pero será de un grosor de tal modo tenuísimo que nunca se podrá cortar [...]. Y es que la superficie es la parte externa de un cuerpo que se conoce, no por profundidad alguna, sino tanto por la longitud como por el grosor [...]».

Una vez establecidas las definiciones de los entes geométricos que va a utilizar pasa a analizar la naturaleza de la visión, «empezando por la sentencia de los filósofos, quienes dicen que las superficies se miden mediante ciertos rayos casi ministros del ver, que por esto los llaman visivos, pues por medio de ellos se imprimen los simulacros de las cosas en los sentidos». Se refiere aquí a las teorías sobre la luz y la visión, formuladas desde la antigüedad, y que fueron recogidas en obras como la *Óptica* de Euclides, la *Catóptrica* de Herón y la *Óptica* de Ptolomeo. Todos estos autores afirmanban que el ojo emite rayos visuales que se propagan en línea recta a gran velocidad. Un objeto se ve cuando, estando iluminado por los rayos de luz, es «barrido» por el haz de rayos visuales que parten del ojo del observador. Euclides establece ciertos axiomas que permiten obtener consecuencias de tipo geométrico, como por ejemplo, la idea de que el hombre juzga el valor de la magnitud de un objeto según el ángulo visual con el cual lo ve (ángulo formado por los rayos visuales que pasan por los extremos del objeto). Podemos afirmar que Euclides comienza a construir la perspectiva.

Alberti distingue tres tipos de rayos visuales: los que *vuelan hasta tocar las partes últimas de la superficie*, los llama rayos *extrínsecos* (o extremos); los que son recibidos en el interior de la superficie, llamados rayos *medios*; y por último, el rayo medio que incide de tal modo en la superficie que causa alrededor suyo ángulos iguales, lo llama rayo *céntrico*. Cada uno de estos rayos tiene una función determinada en el acto de la visión.

Los rayos extrínsecos sirven para determinar la *cantidad*, considerada esta como la distancia existente entre dos puntos del contorno de una superficie; de manera que podemos decir que la *vista actúa por un triángulo*, cuya base es la cantidad vista y cuyos lados son los rayos extrínsecos que van desde el ojo hasta los puntos extremos de la cantidad. Por otra parte, si consideramos todos los rayos extrínsecos que inciden en el contorno de la superficie se forma una pirámide cuya base es la superficie vista y tal que el vértice se encuentra en el ojo. Esta pirámide estará formada por todos los triángulos visivos como el descrito anteriormente.

Los rayos medios son los que están contenidos dentro de la pirámide y nos permiten ver los colores de la superficie, pues «estos rayos hacen lo que se dice que hacen el camaleón y animales similares aterrados de miedo, que suelen coger los colores de las cosas más cercanas para no ser encontrados fácilmente por los cazadores [...]».

El rayo céntrico es aquel que incide sobre la cantidad de manera que los ángulos resultan iguales entre sí y que está rodeado por los demás, por lo que

Alberti lo llama *el príncipe de los rayos*. Podemos afirmar que una cantidad aparecerá mayor a la vista cuando el rayo céntrico incide sobre ella; pero si cambiamos la posición de éste, la visión de la superficie se ve alterada; es decir, la posición del rayo céntrico, junto con la distancia, contribuyen grandemente a la certeza de la vista.

Ahora podemos afirmar que una pintura no es sino una intersección plana de la pirámide visual del pintor, intersección en la que estará determinada la posición del rayo céntrico, lo que permitirá al espectador situarse en el vértice de la pirámide, con lo que la imagen percibida será la «*misma*» que veía el pintor. Para estudiar las propiedades de esta intersección Alberti hace uso de la teoría de las proporciones, especialmente en el caso de que la cantidad a representar sea paralela a la sección (el cuadro), en cuyo caso la cantidad su representación en el cuadro y los rayos visivos que pasan por sus extremos forman dos triángulos semejantes, cuyos lados son proporcionales.

Por último, Alberti termina el Libro I explicando cómo se construye en la práctica la intersección plana de la pirámide visiva, es decir, la pintura:

> «Lo primero, dibujo en la superficie a pintar un cuadrángulo de ángulos rectos, grande cuanto me place, que me sirve de *ventana* abierta desde la cual se ve la historia, y *determino cuán grandes quiero que sean los hombres* en la pintura. Divido la longitud de este mismo hombre en tres partes, las cuales proporciono con la medida que el vulgo llama brazo. Pues tres brazos, como se patentiza en la proporción de los miembros del hombre, es la longitud común del cuerpo humano. Así, pues, con esta medida divido la línea yacente más baja del cuadrángulo dibujado en cuantas partes de este modo entran en ella, y esta misma línea de la base del cuadrángulo me es proporcional a la más cercana cantidad vista que atraviesa y equidista en el pavimento. Después de esto pongo dentro del cuadrángulo un solo punto en el lugar donde debe mirarse, punto que ocupa el mismo lugar al cual es llevado el rayo céntrico, y por esto se llama punto céntrico. La situación conveniente de este punto, no es más alta de la línea que yace que la altura de un hombre que se ha de pintar, pues de este modo quienes lo miren y las cosas pintadas parecen que están en el mismo plano. Puesto el punto céntrico, trazo líneas rectas de ese punto céntrico hasta cada una de las divisiones de la línea que yace, las cuales me demuestran de qué modo las cantidades de las sucesivas traviesas se alteran de aspecto *casi hasta la distancia infinita*.
> [...]

> Tengo una pequeña área, en la cual trazo una línea recta. La divido por aquellas partes en las que está dividida la línea yacente del cuadrángulo. Después pongo sobre esta línea un solo punto perpendicularmente sobre un extremo de esta línea, tan alto cuanto en el cuadrángulo es la distancia entre el punto céntrico y la línea yacente del cuadrángulo, y trazo desde este punto sendas líneas a cada una de las divisiones de esta línea. Después determino cuánta distancia quiero que haya entre el ojo del que mira y la pintura, y determino el lugar de la intersección; efectúo la intersección de todas las líneas con una línea, como dicen los matemáticos, perpendicular. Así, pues, esta línea perpendicular me dará con sus intersecciones todos los términos de la distancia que debe haber entre las líneas traviesas equidistantes del pavimento. De este modo tengo dibujadas en el pavimento todas las paralelas. La prueba de que esto está correctamente dibujado, será si una misma línea recta forma un diámetro (diagonal) de los cuadrángulos conjuntos a la vez en el pavimento pintado. Dando fin diligentemente asimismo a estas cosas, trazo una línea equidistante de la otra de debajo, la cual intersecciona los dos lados verticales del cuadrángulo grande y pasa por el punto céntrico. Y esta línea me sirve para término y límite, que ninguna cantidad excede que no sea más alta que el ojo del que mira.»

PIERO DELLA FRANCESCA

El pintor Piero della Francesca nació en Borgo San Sepolcro en 1416 y murió el 12 de octubre de 1492. Desde muy joven estudió matemáticas y se dedicó a la pintura. En 1458 viaja a Roma y trabaja en la decoración al fresco de la cámara de Pío II. En 1460 regresa a Borgo San Sepolcro y toma contacto con los duques de Urbino para los que realizará numerosos trabajos. De esta época es su conocido cuadro la *Flagelación de Cristo*, una de sus obras más conocidas, en la que podemos apreciar su dominio de la perspectiva llevada a la práctica usando un lenguaje pictórico presidido por la arquitectura. Entre 1472 y 1475 parece que abandona la pintura y se dedica a componer tres importantes tratados que responden, entre otros objetivos, a un *plan de formación matemática* de los pintores: *El Trattato dell'Abaco*, que trata de aritmética, álgebra y estereometría, con el que pretende enseñar a los pintores a medir magnitudes, especialmente volúmenes, y en el que se inspiraría Luca Pacioli para componer parte de su *Summa; el Libellus de quinque corporibus regularibus*, con el que pretende enseñar a los pintores y artesanos a describir los cuerpos sólidos, especialmente los sólidos platónicos, cuya importancia para el estudio de la naturaleza había sido trasmitida por la tradición neoplatónica; y, por último, *De prospectiva pingendi*, en el que se enseña cómo usando la geometría se puede conseguir que el ojo produzca en el espíritu la sensación de que el cuadro es una ventana abierta a un espacio tridimensional.

En *De Prospectiva pingendi* encontramos cierto avance hacia la matematización del espacio, que se manifiesta en los intentos por parte de Piero della Francesca de alejar la perspectiva de la óptica tradicional, planteando su exposición en términos de geometría plana, siguiendo un método axiomático deductivo, con un estilo muy parecido al de *Los Elementos* de Euclides, al que cita en numerosas ocasiones a lo largo del libro, haciendo referencia a algunas de sus proposiciones.

De Prospectiva Pingendi permaneció durante mucho tiempo sin editar. Actualmente se conservan varias versiones manuscritas, de las que dos son particularmente interesantes: una es el manuscrito número 1576 de la Biblioteca Palatina de Parma; la otra está en la Biblioteca Ambrosiana de Milán. Las ediciones actuales se basan en estas últimas y podemos encontrar la obra dividida en tres libros.

El libro I comienza con la descripción de las partes de la pintura: *Disegno*, *commensuratio* y *colorare*. Por *diseño* entendemos, dice Piero, el estudio de los contornos y perfiles de las cosas. Por *conmensuración* se entiende la colocación en su lugar y en la proporción adecuada de estos contornos y perfiles. Por *coloreado* se entiende la atribución de colores según la distribución de las fuentes de luz. De estas tres partes sólo se trata en el libro la *conmensuración*, llamada también *perspectiva*. A continuación expone los elementos que intervienen en la visión y representación mediante la pintura de un objeto: Lo primero es el ojo en el que se representan todas las cosas vistas bajo cierto ángulo; lo segundo es la forma de la cosa sin la cual el entendimiento no la podría comprender; lo tercero es la distancia del ojo a la cosa vista, pues sin la distancia la cosa sería *contingente* al ojo; lo cuarto son las líneas que van desde el contorno de la cosa hasta el ojo, sin las cuales no se podría discernir la cosa; lo quinto es el *lugar determinado* en el que se describen las cosas, es decir, el cuadro. Después de esta introducción el libro continúa con once proposiciones de carácter óptico-geométrico cuyo objetivo es geometrizar la representación de lo que vemos. El resto está dedicado a los problemas de perspectiva de figuras planas: cuadrados, cuadrículas, polígonos, etc.

El libro II está dedicado a la representación en perspectiva de volúmenes como pilares de base cuadrada, columnas de base circular o poligonal. Por último, en el libro III se exponen métodos perspectivos para cabezas humanas, capiteles y basas de columnas, así como otros objetos dispuestos de diversas formas.

GIRARD DESARGUES

Girard Desargues (1591-1661) nació en Lyon, donde su padre era notario real. Llegó a ser arquitecto e ingeniero militar y hacia 1630 se encuentra en París donde se relaciona con el círculo de Marin Mersenne, por medio del cual toma contacto con Fermat y Descartes, entre otros destacados matemáticos. Desargues fue un hombre eminentemente práctico que orientó la mayoría de sus publicaciones a mejorar el rendimiento del trabajo de los constructores y artistas liberales. Con esta intención publicó obras sobre la talla de piedras, la construcción de relojes solares, la enseñanza de la música, etc. También fue un gran estudioso de la perspectiva, como lo prueba la publicación en 1636 del libro titulado «Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage», en el que usa la geometría para formular en términos matemáticos las reglas de la perspectiva que habían sido desarrolladas por los pintores y arquitectos del Renacimiento.

En 1639 Desargues publica un pequeño tratado sobre las cónicas titulado «Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan» («Borrador de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano») en el que considera a las cónicas como las diversas formas de ver un círculo en perspectiva. En efecto, los rayos visuales que parten del ojo del observador y que inciden en el círculo forman un cono, que seccionado por un plano (el cuadro de los pintores renacentistas) determina una sección cónica que no es sino la «forma» con la que se ve el círculo desde la posición en la que se encuentra el observador. Cambiando las posiciones del observador (vértice del cono) y de la sección (el cuadro) se pueden obtener las diversas cónicas: elipse, parábola e hipérbola. Algunas propiedades de las diferentes secciones cambian, pero otras permanecen invariantes. Estas últimas son las que Desargues estudia con especial interés, dando lugar a una nueva visión de las cónicas, diferente a la de Apolonio (262 a.C.-190 a.C.) para el que cada cónica se estudiaba por procedimientos particulares, de forma que lo más significativo eran las diferencias entre ellas, y no las propiedades comunes.

La búsqueda de propiedades comunes a las distintas secciones cónicas se convierte en un problema de la misma naturaleza que la búsqueda de las propiedades comunes a las distintas representaciones en perspectiva de una escena dada. Podemos observar que de la misma forma que el contorno de un círculo cambia en las diferentes secciones de la misma proyección, así también variará la longitud de un segmento, la medida de un ángulo o de un área. Más aún, las líneas paralelas en una escena física, no lo son en una representación de ellas, sino que se encuentran en un punto. Dado que no se conservan ni la longitud, ni el ángulo, ni el área, ni tampoco el paralelismo de una sección a otra, podemos concluir que dos secciones de la proyección de un objeto no tienen por que ser congruentes o semejantes, o lo que es lo mismo, sus magnitudes no son proporcionales, por lo que podemos intuir que el estudio de las propiedades comunes no parece incumbir a la geometría euclídea.

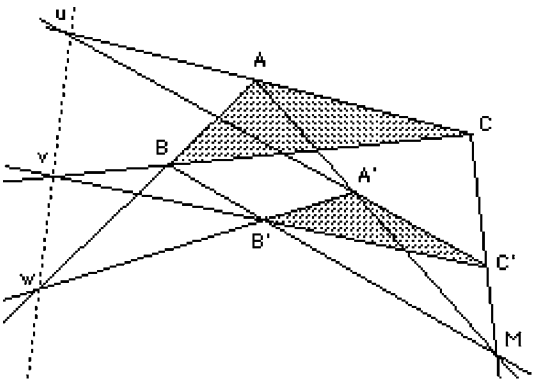
Hay algunas propiedades que se conservan de una sección a otra y que son fáciles de comprobar: por ejemplo, una línea recta continuará siéndolo en todas las secciones (puntos alineados se corresponden con puntos alineados), un triángulo seguirá siendo un triángulo, un cuadrilátero seguirá siendo un cuadrilátero. Partiendo de propiedades elementales como éstas, Desargues profundiza en el estudio de las propiedades comunes a las diferentes secciones, hasta obtener algunas de gran importancia, expuestas en su *Brouillon project.*

Una de las ideas más brillantes de Desargues está relacionada con la historia del infinito en matemáticas. Estudiando la perspectiva se da cuenta de que las rectas paralelas se transforman en rectas concurrentes en un punto del *horizonte*, lo que, a primera vista, nos obliga a pensar que el hecho de que dos rectas sean paralelas o concurrentes no es una propiedad común a las diferentes secciones de una proyección. Para evitar esto Desargues asigna a cada recta un «punto del infinito»; de manera que dos rectas paralelas son las que tienen este punto en común. Así las rectas concurrentes se corresponden con rectas concurrentes, teniendo en cuenta que si dos rectas son paralelas, es decir se cortan en el punto del infinito, su imagen perspectiva será dos rectas que se cortan en un punto del horizonte, es decir, el horizonte es la representación del conjunto de todos los puntos del infinito (la recta del infinito).

Otro aspecto interesante de la consideración de las cónicas expuesta es el hecho de que parece inconcebible que se puedan asimilar al círculo, curva cerrada, otras no cerradas y con ramas infinitas como la parábola; sin embargo una parábola, que es una curva abierta, puede transformarse mediante la perspectiva en una elipse, que es una curva cerrada, al unirse las ramas infinitas en un mismo punto del *horizonte* que representa, a distancia finita, la recta del infinito común a todos los planos horizontales.

La obra de Desargues no fue comprendida por sus contemporáneos y fue objeto de duras críticas. Del *Brouillon project* solamente imprimió cincuenta ejemplares que repartió entre sus «amigos» para que pudiesen discutir sus tesis. El libro se perdió hasta que en 1854 el geómetra Chasles encontró una copia manuscrita por uno de los amigos de Desargues, Philippe de La Hyre. En 1950 se encontró un ejemplar original en la Biblioteca Nacional. El texto de este libro contiene muchos neologismos y términos tomados de la botánica, lo que dificulta enormemente su compresión. Si a esto añadimos el auge experimentado por las geometría analítica de Descartes, debido a los espectaculares resultados obtenidos, comprenderemos el poco éxito alcanzado por Desargues, cuyas ideas tendrán que esperar casi dos siglos más para ser desarrolladas. Aun así, después de 1639 estudia algunos problemas de perspectiva. Su amigo, el grabador Abraham Bosse (1611-1678) intenta dar a conocer las ideas de Desargues y publica en 1648 la *Manière universelle de M. Desargues pour practiquer la perspective,* en el que estudia la teoría de la *polar* de un punto respecto a un círculo, extendiéndola, por proyección, a todas las cónicas. En este tratado encontramos también el célebre *Teorema de Desargues*:

> «Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto sus pares de lados correspondientes se cortan respectivamente en tres puntos que están alineados»



Teorema que, por cierto, se seguirá cumpliendo aunque los lados de los triángulos sean paralelos; siempre que admitamos, como Desargues, que las rectas paralelas se cortan en el *punto del infinito*; de forma que los tres puntos de corte de los tres pares de lados están sobre la recta del infinito, es decir están alineados. Si tenemos en cuenta que si los dos triángulos tienen los lados correspondientes paralelos, entonces serán semejantes, es decir, cumplirán el Teorema de Thales, podemos afirmar que este último teorema es un caso particular del de Desargues.

CONCLUSIÓN

A partir del tratamiento que hace Desargues del infinito podemos decir que la barrera que separaba la idea de *infinito* del mundo del conocimiento racional, es decir, de la Matemática (la proporción entre las magnitudes) comienza a caer, de manera que el conocimiento de lo infinito, que Nicolás de Cusa había puesto sólo al alcance de Dios, empieza a formar parte de del pensamiento de los matemáticos poseídos, hasta entonces, por la *Docta Ignorantia*.

Podemos afirmar que los primeros «golpes» contra esta barrera fueron dados por los pintores renacentistas, en su intento de, por una parte, representar el espacio infinito y homogéneo de Platon, y, por otra, elevar la pintura, hasta entonces considerada como una actividad mecánica (artesanal) a la condición de *arte liberal*, capaz de producir conocimiento verdadero sobre el mundo que nos rodea.

Este tratamiento del infinito supone un «humanización» del mismo, pues, hasta entonces era una cualidad solo accesible al conocimiento divino. A partir de aquí, los matemáticos disponen de una idea, que junto al resto de los conocimientos desarrollados a lo largo de la historia, dotará a la matemática de una impresionante capacidad creadora de nuevos conceptos, aplicables al estudio de la Naturaleza. Prueba de ello son las nuevas teorías que surgen a partir del siglo XVI, como son el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Proyectiva, las geometrías no euclídeas etc. , teorías, todas ellas, impregnadas de «infinitud» por todas partes y que extienden sus influencias hasta algunas de las modernas concepciones del mundo, como son la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad.

La Laguna, enero de 2002.

BIBLIOGRAFÍA

ALBERTI, LEON BATTISTA. *Sobre la pintura*. Fernando Torres-Editor. Traducción anotada e ilustrada, bibliografía y análisis introductorio a cargo de Joaquim Dols Rusiñol. Valencia 1976.

CROSBY, ALFRED W. *La medida de la realidad*. Crítica (Grijalbo Mondadori). Barcelona 1988.

DHOMBRES J., SACAROVITCH J. (Directores). *Desargues en son temps*. (Varios autores). Editions Albert Blanchard, París 1994.

FRANCASTEL, Pierre. *Sociología del arte,* Alianza. Madrid 1975.

FRANCESCA, Piero della. De la perspective en peinture. Traducción al francés de Jean Pierre Le Goff. In Media Res, París 1998.

KOIRÉ, Alexandre. *Del mundo cerrado al universo infinito* (4ª edición). Siglo XXI Editores, Madrid 1984.

MARTÍN, Kemp. *La ciencia del arte*, Akal, Madrid 1984.

MINGUEZ PÉREZ, Carlos. *De Ockham a Newton*. Cincel. Madrid 1989.