LA GEOMETRÍA SE MUEVE

CARLOS MEDEROS MARTÍN
I.E.S. Viera y Clavijo

En 1638 Galileo publica su obra *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* en la que podemos ver el nacimiento de la ciencia del movimiento, la Mecánica, como hija de la geometría de Euclides. En efecto, de la aplicación de la Teoría de las Proporciones (Libro V de los *Elementos* de Euclides) a los espacios y a los tiempos, considerados como segmentos, surgen las leyes que rigen el movimiento natural de caída de los graves y el movimiento violento de los proyectiles.

En 1687 Newton escribía en el prefacio a la primera edición de sus *Philosophiae naturalis principia mathematica*:

> «[...] *Describir líneas rectas y círculos es un problema, pero no un problema geométrico. Se exige de la mecánica la solución de ese problema, y cuando está resuelto la geometría muestra la utilidad de lo aprendido; y constituye un título de gloria para la geometría el hecho de que a partir de esos pocos principios, recibidos de otra procedencia, sea capaz de producir tantas cosas. Por consiguiente, la geometría está basada en la práctica mecánica, no es sino aquella parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir*».

De estas palabras podemos deducir que, para Newton, la geometría es un conocimiento que se deriva de la mecánica, es decir, la geometría es hija de la mecánica.

Podemos afirmar, en consecuencia, que en un corto periodo de tiempo la geometría pasó de ser la «madre» a ser la «hija» de la mecánica. Posiblemente, el hecho que desencadenó este intercambio de papeles en el orden epistemológico fue la entrada en la geometría de nuevos objetos creados por el movimiento; objetos, que como sabemos, estaban excluidos de la misma en la antigüedad. Así, por ejemplo, para Apolonio una elipse era un objeto estático que resultaba de cortar un cono por determinado plano, la elipse era la sección; sin embargo, para Descartes una elipse es la trayectoria de un punto que se mueve de manera que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Pero la entrada del movimiento en la geometría estuvo precedida por un cambio en su concepción. Del movimiento como *proceso* de los peripatéticos se había pasado al movimiento *relación* en Galileo. Y esta definición del movimiento en términos de relación (razón) entre el espacio y el tiempo no fue posible hasta la geometrización del tiempo, es decir, hasta su representación geométrica por medio de un segmento o de una recta. En efecto, podemos encontrar en la obra de Galileo algunos diagramas en los que designa el tiempo por una línea que forma parte de la figura en la que se basa la demostración de alguna proposición. Esta representación del tiempo como segmento permite establecer razones entre espacios y tiempos como magnitudes homogéneas y, en consecuencia, el uso de la teoría de las proporciones del Libro V; además ayuda a la imaginación a comprender esta entidad huidiza que es el tiempo y a representar el movimiento como si estuviese ligado a un flujo continuo y uniforme. Una consecuencia inmediata de este proceso es el hacer posible la división de un movimiento en partes elementales, delimitadas cada una de ellas por sus intervalos temporales correspondientes, que pueden ser estudiadas separadamente. Estamos ante lo que podemos llamar el reloj geométrico, preludio del desarrollo de una cronometría de precisión que permitiría la medida física del tiempo.

En 1673 Christian Huygens publica en París el libro dedicado al rey Luis XIV *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*, en el que se puede estudiar de forma meridiana cómo la relación entre geometría y movimiento, establecida mediante la geometrización del tiempo, en el seno de ciertas hipótesis mecánicas, condujo a la construcción de un reloj con pretensiones de ser preciso.

CHRISTIAAN HUYGENS: EL NUEVO ARQUÍMEDES

Ch. Huygens nació en La Haya el 14 de abril de 1629 en el seno de una familia calvinista enteramente dedicada al servicio de la casa de Orange de las Provincias Unidas, de las que tanto su padre como su hermano mayor, llamados ambos Constantijn, eran embajadores. Desde muy joven Christiaan presenta la rara combinación de un espíritu dotado para las matemáticas y de una habilidad notable para las construcciones prácticas. Su padre se da cuenta de este hecho y le proporciona una formación matemática en su casa por medio de profesores particulares, que lo introducen en el conocimiento de los geómetras clásicos, especialmente, Arquímedes. Al mismo tiempo mantiene relaciones epistolares con el monje de la orden de los Mínimos Marin Mersenne (1588-1648), amigo de su padre, el cual le plantea continuamente desafíos intelectuales relacionados con los problemas de actualidad en los diversos campos de la filosofía natural, y que mas tarde lo situará en el centro de la correspondencia científica de la Europa sabia. Por esta época conoce a Descartes (1596-1650), también amigo de su padre, y visitante en varias ocasiones del domicilio familiar de los Huygens, lo cual, posiblemente, tuvo mucho que ver con la dedicación de Christiann a la filosofía natural. Entre 1645 y 1647 estudia en la Universidad de Leyden, donde es alumno de Van Schooten (1615-1660). Entre 1647 y 1649 estudia en el Colegio de Orange en Breda, donde fue alumno del matemático británico John Pell (1610-1685). A partir de aquí, la carrera de Huygens está íntimamente ligada a sus viajes. Viaja a París tres veces: en 1655, en 1661 y en 1663. Por estos mismos años viaja a Londres, donde es nombrado *fellow* de la *Royal Society* y acogido como un filósofo de la naturaleza extraordinario.

Ya en 1659 Huygens está formado en las dos ramas de la nueva ciencia: la mecánica celeste y la cinemática terrestre, siguiendo, fundamentalmente las dos principales obras de Galileo: el *Dialogo* y los *Discorsi*, aprovechando la coyuntura política y religiosa que hace de su país el principal editor de obras referidas a la nueva ciencia. Además es un extraordinario discípulo de Descartes, y, como tal, conocedor de su «Mecánica» y, en ocasiones, crítico con sus posiciones. En esta época ya había realizado los descubrimientos científicos que le darán renombre, como las propiedades de la cicloide, las evolutas e involutas, la explicación de los anillos de Saturno usando la teoría de los vórtices, además de ser un experto observador astronómico y pulidor de lentes para la construcción de telescopios. Se puede decir que hasta la publicación de su gran obra, el *Horologium Oscilatorium* en 1673, no hace más que profundizar en las numerosas intuiciones de juventud con el fin de llegar a una determinación completa de la naturaleza del movimiento.

En 1666 se establece en París, aceptando la invitación de Jean Baptiste Colbert, ministro del rey Luis XIV, para ser uno de los siete fundadores de la *Académie Royal des Sciences*. En 1672 Francia entra en guerra con Holanda; su padre y su hermano se ponen al servicio de Guillermo III de Orange desempeñando funciones importantes en la defensa diplomática y militar de Holanda; sin embargo, Christiaan permanece en París al servicio del rey de Francia al cual, incluso, dedica su gran obra, el *Horologium*. En 1681 retornó a La Haya por razones de salud, con la intención de volver a París algunos meses después, pero su enfermedad dura más de lo esperado y en 1683 muere Colbert, promotor de la *Académie* y amigo suyo. En parte por esta razón y también a causa del cambio del clima político en Francia (la revocación del Edicto de Nantes está cerca) no cree poder regresar y además las autoridades francesas no lo animan a ello. Permanece en Holanda sin una función que desempeñar. Es entonces cuando encuentra tiempo para publicar sus teorías sobre la gravedad y la luz. El *Tratado de la Luz* aparece en 1690. En este periodo retoma las cuestiones de matemáticas así como los relojes y su uso. En 1694 cae nuevamente enfermo y muere el 8 de junio de 1695 en su ciudad natal.

En resumen, podemos considerar la obra de Huygens como la culminación del estudio del movimiento siguiendo las preguntas de Mersenne, las leyes de Galileo, la matemática de Arquímedes y, especialmente, la mecánica de Descartes, lo que le lleva a una concepción del Mundo que es a la vez «mecánico» y «geométrico», y que justifica el sobrenombre que le solía dedicar Mersenne: *el nuevo Arquímedes.*

LA FÁBULA MECÁNICA

> «*Permitid pues que vuestro pensamiento, durante un breve tiempo, salga fuera de este mundo para acceder a otro totalmente nuevo, que yo haré nacer en su presencia en los espacios imaginarios. Los filósofos nos dicen que esos espacios son infinitos, y deben creerlo sin duda puesto que son ellos mismos los que los han creado*».

Con estas palabras comienza el capítulo 6 del *Mundo o Tratado de la Luz*, obra redactada por Descartes entre 1629 y 1633 y que no fue publicada entonces, posiblemente como consecuencia de la promulgación, el 22 de junio de 1633, de la segunda condena a Galileo.

Descartes nos propone, a modo de fábula, la descripción de un «nuevo mundo», su mundo, producto de la imaginación y en el que no admitiremos nada más que lo que cada uno pueda conocer tan perfectamente como sea posible. Esto significa que en el estudio de la materia que compone el mundo debemos prescindir de las formas, acciones, cualidades, apetencias, para quedarnos con la única propiedad de los cuerpos que somos capaces de entender: la *extensión*. La consideración de la extensión como única sustancia corpórea nos lleva a la identificación entre *materia* y *espacio* y, en último término, a la negación de la existencia del vacío; es decir, nos conduce a la idea de espacio como un *plenum* de materia, pues lo que es extenso, *ya es en el más pleno sentido de la palabra*. Ahora bien, si la substancia extensa es una, ¿cómo se puede explicar la diversidad de cuerpos que existen? Para resolver esta cuestión Descartes recurre al concepto de *movimiento* como principio diferenciador que produce las distintas configuraciones en el *pleno* de la extensión, y que dan lugar a los diferentes cuerpos.

Ahora bien, si el movimiento se produce en un espacio pleno en el que no se puede dar el vacío, el espacio ocupado por un cuerpo que se mueve debe ser inmediatamente ocupado por otro cuerpo, que a su vez deja un espacio que debe ser ocupado por un tercero y así sucesivamente, hasta un último cuerpo cuyo lugar es ocupado por el primero; en otras palabras, los movimientos deben encadenarse circularmente, surgiendo así la idea de *torbellino* (o *vórtice*) que será de gran importancia para la descripción del *fabuloso* mundo de Descartes.

Pero todas las fábulas tienen ciertas conexiones con el mundo *real* (es decir, un mundo similar al que estableciera Aristóteles) y además obedecen a *ciertas* reglas en lo que se refiere a la producción del discurso. Esta no podía ser menos. Así, el capítulo 5 del *El Mundo* trata del número de los elementos y sus cualidades; el capítulo 7 se refiere a las leyes de la naturaleza de este nuevo mundo.

En cuanto a los elementos Descartes admite la existencia de tres: El primero, el elemento *fuego*, es el más sutil y penetrante, como un líquido, pero sus partes son mucho menores y se mueven mucho más deprisa que cualquiera de las de los demás cuerpos. Además, con el fin de no estar obligados a admitir ningún vacío en la Naturaleza, no se le atribuyen partes que tengan tamaño o figura determinada. El segundo elemento es el *aire*, el cual podemos concebir también como un cuerpo líquido muy sutil en comparación con el tercero, pero al que hay que atribuir tamaño y figura a cada una de sus partes e imaginarlas redondas y juntas. Por último, el tercer elemento es la *tierra*, cuyas partes se consideran que son mayores y se mueven más lentamente que las del segundo elemento.

Sobre las leyes de la Naturaleza de este mundo nuevo podríamos decir que reflejan la inmutabilidad de Dios, el cual actúa siempre de la misma manera produciendo siempre substancialmente el mismo efecto, aunque accidentalmente se puede dar una gran diversidad en dicho efecto. En la primera regla Descartes enuncia que

«cada parte de la materia, considerada individualmente, permanece siempre en el mismo estado, en tanto que el encuentro con las demás no la obliga a modificarlo. Es decir, que si tiene cierto tamaño, no lo reducirá jamás a menos que las demás la dividan; si es redonda o cuadrada, no modificará jamás esta figura sin que las demás la obliguen a ello; si está en reposo en algún lugar, no partirá jamás de allí en tanto las demás no la desplacen de dicho lugar; y si ya ha comenzado a moverse, continuará haciéndolo siempre con idéntica fuerza hasta que las demás la detengan o la retarden».

La segunda regla supone que

«cuando un cuerpo empuja a otro, no podría transmitirle ningún movimiento, a no ser que pierda al mismo tiempo otro tanto del suyo, ni podría privarle de él, a menos que aumente el suyo en la misma proporción».

Esta es la conocida ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

En cuanto a la tercera, Descartes añade que

«cuando un cuerpo se mueve, aunque su movimiento se realice lo más frecuentemente en línea curva y no pueda darse jamás ninguno que no sea en alguna forma circular, tal como ha sido dicho más arriba, sin embargo, cada una de sus partes, consideradas individualmente, tiende siempre a continuar el suyo en línea recta. Y así su acción, es decir, la inclinación que tienen a moverse, es diferente de su movimiento».

Para ilustrar esta regla Descartes usa el ejemplo de la piedra que se mueve en una honda siguiendo un círculo aunque en cada instante su inclinación es moverse en línea recta, de manera que, en caso de ser liberada, comenzará a moverse de esta manera.

En resumen, todos los movimientos que existen en el mundo fueron creados por Dios siendo rectilíneos, de manera que las diversas configuraciones de la materia, es decir, las interacciones, son las que los hacen irregulares y curvos; «de igual manera los teólogos nos enseñan que Dios es también el autor de todas nuestras acciones, en tanto que existen y en tanto que tienen alguna bondad, y que son las diversas disposiciones de nuestra voluntad, las que pueden hacerlas viciosas». (*El Mundo,* Cap.7)

Por último, ¿qué fabulista no quisiera ver su fábula hecha realidad? Descartes, desde luego, sí; como podemos concluir de las palabras con las que termina el capítulo 6 del Mundo, con el que iniciábamos la descripción de la fábula mecánica:

> «*Además mi intención no es explicar, como ellos* [los filósofos]*, las cosas que en efecto existen en el verdadero mundo, sino sólo fingir uno a mi gusto, en el cual no exista nada que los espíritus más burdos no sean capaces de concebir y que pueda, sin embargo, ser creado tal y como yo lo habré fingido*».

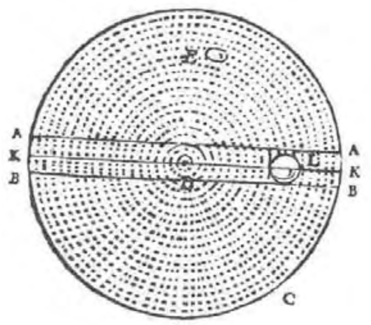
LA FÁBULA GEOMÉTRICA

Para abordar las posiciones de Huygens frente al estudio de la Naturaleza, nos centraremos, a modo de ejemplo, en su explicación del fenómeno de la gravedad que podemos leer en su *Discours de Cause de la Pesanteur*, publicado en La Haya en 1690:

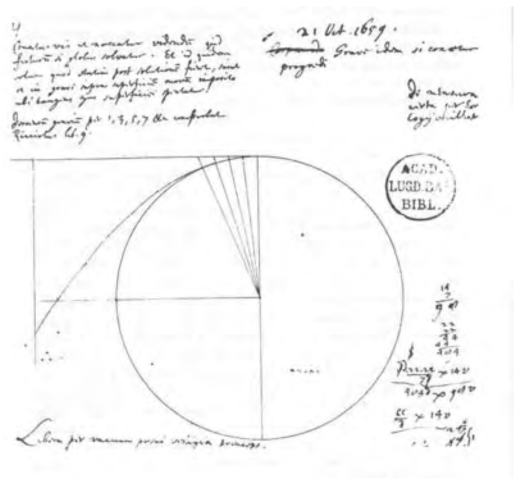
> *«El esfuerzo por alejarse del centro es un efecto constante en todo movimiento circular. Y aunque este efecto parezca directamente opuesto al de la gravedad, y que se haya objetado a Copérnico que por la rotación de la Tierra en 24 horas, las casas y los hombres deberían ser proyectados al aire; yo haré ver sin embargo, que este mismo esfuerzo que hacen los cuerpos que giran por alejarse del centro, es la causa de que ortros concurran hacia el mismo centro*».

Para encontrar la causa de la gravedad es preciso suponer que en la naturaleza no hay sino cuerpos que están hechos de una materia, en la que no se considera ninguna cualidad ni inclinación a aproximarse unos a otros, sino solamente diferentes figuras, tamaños y movimientos, aunque si puede ocurrir que muchos de estos cuerpos tiendan directamente hacia un mismo centro y se mantengan juntos alrededor de éste originándose el fenómeno que llamamos *gravedad.*

Imaginemos que alrededor del centro D gira la materia fluida contenida en el espacio ABC, del cual no puede salir debido a otros cuerpos que la rodean. Es sabido que todas y cada una de las partes de este fluido tienden a alejarse del centro, pero esto no puede ocurrir porque si una de estas partes se alejara del centro, el espacio que deja libre tendría que ser ocupado inmediatamente por otra, lo cual es imposible ya que todas las partes de la materia tienen la misma tendencia a alejarse del centro. Ahora bien, si entre las partes de la materia que gira hay una , como E, que no sigue el movimiento circular de las otras o que va más despacio, será empujada hacia el centro, puesto que al no hacer esfuerzo por alejarse, cederá su sitio a una de las partes que están más cerca del mismo, debiendo, en consecuencia, ocupar el espacio dejado por ésta última, lo que provoca que E se acerque al centro.



Esta concepción de la gravedad, obtenida a partir de la fuerza centrífuga, permite a Huygens afirmar que el peso de un cuerpo, por ejemplo una libra de plomo, es exactamente igual al esfuerzo que una porción de igual tamaño de materia fluida hace por alejarse del centro o, incluso, que es la misma cosa. Ahora bien, la equivalencia entre gravedad, explicada a través de la mecánica cartesiana, y la fuerza centrífuga propia del movimiento circular, el cual puede ser descrito mediante partículas, ruedas, péndulos, etc. y sus abstracciones geométricas: puntos, círculos, rectas, etc., permite a Huygens trasladar la descripción del mundo de lo físico a lo geométrico; poniendo, además, de manifiesto su “método” para estudiar la Naturaleza: el hombre puede entender todo lo que puede ser reducido a un *mecanismo*, entendiendo por tal una



construcción cuyas partes se mueven unas con respecto a otras pero manteniendo siempre ciertas relaciones entre ellas expresables en términos geométricos. Por otra parte, se ponen de manifiesto ciertas diferencias entre la posición de los cartesianos, para los cuales la aceptación de una filosofía mecanicista no conduce necesariamente a una matematización de la Naturaleza, y la de Huygens, para el cual estamos obligados a formular hipótesis mecanicistas que son las únicas adecuadas a nuestra inteligencia, dado que se basan en principios que no sobrepasan del alcance de nuestro entendimiento; y, para Huygens, este límite lo establece la Geometría, como se puede comprobar leyendo el prefacio de su *Tratado de la Luz.*

«*Veremos allí demostraciones que no producen una certitud tan grande como las de los Geómetras, e incluso que difieren mucho, puesto que, así como los Geómetras prueban sus Proposiciones por principios ciertos e incontestables, aquí los principios se verifican por las conclusiones que de ellos se deducen*».

Es decir, por una parte, se establece la seguridad epistemológica de la Geometría, y, por otra, se reconoce que la validez de los principios de la mecánica sólo puede ser deducida de la validez de las conclusiones; y esto sólo puede ser deducido de la experiencia. He aquí las dos características fundamentales de los trabajos de Huygens: experimentación y geometría.

Así encontramos a lo largo de la obra de Huygens, cuya pieza maestra es el *Horologium*, muchos *mecanismos* para explicar diversos fenómenos naturales como la luz, la gravedad, los anillos de Saturno, el péndulo, etc.,que no son sino la descripción geométrica, metáforas geométricas, podríamos decir, de los diversos episodios de la fábula mecánica; es decir, la *fábula geométrica*, que acabará convirtiéndose, a finales del siglo XVII, en el *gran autómata planetario* descrito por Newton en sus *Principia*.

EL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM*.

El *Horologium Oscillatorium* se terminó de imprimir en París el uno de abril de 1673 por François Muguet, tipógrafo del rey, pero sus contenidos ocupaban los pensamientos de su autor desde hacía casi veinte años. En efecto, en 1659 Huygens se propuso resolver una cuestión previamente planteada por Mersenne: determinar el valor exacto para la constante de la aceleración de la gravedad. Debemos tener en cuenta que en el siglo XVII las relaciones entre magnitudes físicas no se expresaban mediante fórmulas, sino mediante proporciones (por ejemplo: los espacios son como los cuadrados de los tiempos; en lugar de $s = kt^2$, como escribiríamos hoy); por lo que determinar el valor de la constante (de proporcionalidad) significa hallar un par de valores relacionados, uno para cada una de las magnitudes en cuestión, que junto con otro valor de una de ellas, permita establecer la proporción y hallar la cuarta proporcional. En el caso de la aceleración de la gravedad, se trata de hallar la *distancia recorrida por un grave que cae, partiendo del reposo, durante el primer segundo de la caída*. Pero, ¿cómo medir un segundo de tiempo? Podemos considerar el *Horologium* como la narración de los distintos pasos dados por su autor para responder esta pregunta; es decir, para la geometrización del tiempo a través de la incorporación del movimiento a la geometría. Partiendo de axiomas mecánicos e incorporando el movimiento como generador renuevos conceptos geométricos se llega a la descripción de la relación entre *fuerza centrífuga* y *aceleración de la gravedad*; y es el dominio geométrico de esta relación la que permite una medida precisa del tiempo.

Por otra parte, durante el siglo XVII se buscaba en toda Europa una solución para el problema de la determinación de la longitud en el mar, que como es sabido, pasaba por encontrar un método para mantener la hora a bordo de los barcos de una forma precisa. La teoría de las evolutas e involutas, así como la del péndulo cicloidal, expuestas en la tercera parte del *Horologium*, son las aportaciones de Huygens a la solución de este problema.

El libro comienza con una dedicatoria a Luis XIV, rey de Francia y de Navarra, en la que Huygens reconoce que debemos a Francia el resurgimiento de la Geometría, pues fue allí donde surgieron los primeros «que recondujeron a la luz» esta ciencia, perdida desde hacía mucho tiempo, y gracias a ellos se extendió por toda Europa, siendo cultivada por «hombres muy sutiles», que no sólo recuperaron los conocimientos de la Antigüedad, sino que los sobrepasaron, aplicando estos a la construcción de instrumentos útiles para la «comodidad de la vida» y al «conocimiento de la Naturaleza». Sigue una égloga titulada *Dafne* dedicada al autor, escrita en verso por Adrien Vallius, capitán de navío holandés y amigo de Huygens.

A continuación siguen las cinco partes en las que está dividido el contenido del libro:

Primera parte:
- Descripción del reloj.

Segunda Parte:
- De la caída de los graves.
- Del movimiento a lo largo de la cicloide.

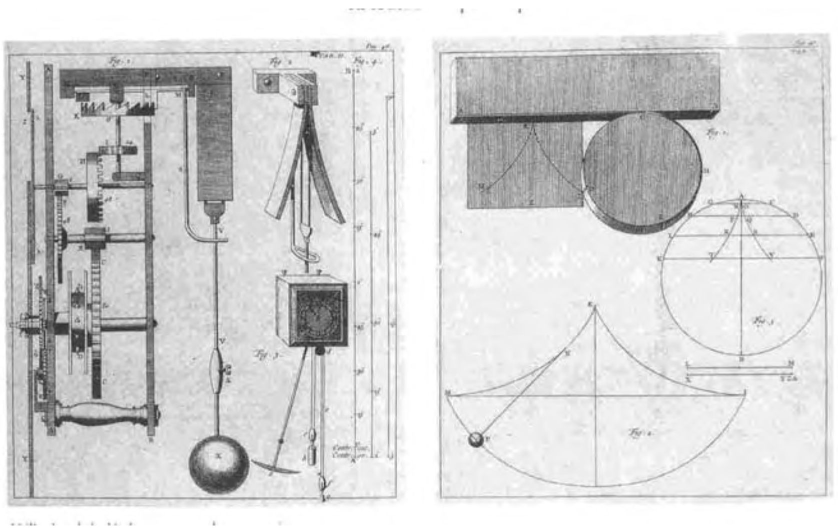
Tercera parte:
- Del desarrollo de las líneas curvas.

Cuarta parte:
- Del centro de oscilación.

Quinta parte:
- Construcción del segundo reloj.
- De la fuerza centrífuga.

1ª PARTE DEL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM*
DESCRIPCIÓN DEL RELOJ.

Comienza el libro con una descripción de las características técnicas y los detalles constructivos del reloj, apoyada en la siguiente figura:



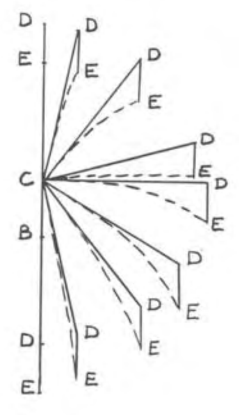
en la que, además, se puede ver la forma de construir la curva cicloide, en cuyas propiedades se basa el funcionamiento del péndulo que sirve de regulador en este reloj.

Esta parte termina con la exposición de la manera de disponer el reloj a bordo de un barco, así como con la relación de los resultados de algunas pruebas del reloj hechas en el mar.

2ª PARTE DEL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM* DE LA CAÍDA DE LOS GRAVES Y EL MOVIMIENTO SOBRE LA CICLOIDE

Se centra en el estudio del movimiento de caída de los graves. Comienza con el establecimiento de tres hipótesis que servirán de base al sistema deductivo de Huygens y que le permiten introducir el principio de conservación del movimiento rectilíneo uniforme (inercia), así como el de la descomposición de un movimiento en varios movimientos más sencillos e independientes, lo que le permite identificar la trayectoria de los móviles con las curvas mecánicas que habían sido admitidas en el seno de la Geometría por Descartes. Podemos decir que la función de las hipótesis es servir de puente entre *la fábula mecánica* y la *fábula geométrica*.

I. Si la gravedad no existiese y la resistencia del aire no se opusiese al movimiento, cada cuerpo que reciba un movimiento inicial, lo continuará con una velocidad constante y siguiendo una línea recta.
II. Ahora bien, ocurre por la acción de la gravedad, cualquiera que sea su causa, que los cuerpos se mueven con un movimiento compuesto de su movimiento uniforme en una dirección cualquiera, y el de descenso debido a la gravedad.
III. Y estos dos movimientos pueden ser considerados por separado, no estando el uno influido por el otro.



Sea un grave que parte del reposo y que en el tiempo F recorre, por la acción de la gravedad un espacio CB. Supóngase ahora que no hay gravedad y que el mismo cuerpo recibe un impulso que le hace recorrer, con un movimiento uniforme, el espacio CD en el mismo tiempo F. Si ahora consideramos la gravedad el cuerpo, partiendo de C, no llegará a D sino a cierto punto E, situado en línea recta por debajo de D, de manera que el espacio DE sea igual a CB. De esta manera, el movimiento uniforme y el que proviene de la gravedad, recorren sus porciones de espacio, sin oponerse uno a otro; y, de aquí, afirma Huygens, se podrá deducir el principio que rige la aceleración de los graves. Cuando el movimiento uniforme no sigue la vertical, podremos determinar la línea seguida por el cuerpo por medio de esta composición de movimientos.

Estamos en condiciones ahora, afirma Huygens, de establecer las leyes que rigen el movimiento de caída de los graves, considerando éste como una composición de movimientos uniformes con la acción de la gravedad. De esta manera, el espació recorrido por un grave que cae en un instante de tiempo dado se obtiene sumando el espacio recorrido por el mismo con una velocidad de caída uniforme igual a la adquirida hasta el instante anterior más el espacio recorrido por la acción de la gravedad durante el instante de tiempo considerado. A partir de esta idea se demuestran las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN I: En tiempos iguales, la velocidad de un grave que cae, aumenta en porciones iguales; y los espacios recorridos desde el principio de la caída en tiempos iguales aumentan continuamente en un exceso constante.

PROPOSICIÓN II: El espacio recorrido en un tiempo determinado por un grave que cae partiendo del reposo, es la mitad del espacio que recorrería con un movimiento uniforme, en un tiempo igual, con la velocidad adquirida al final de la caída.

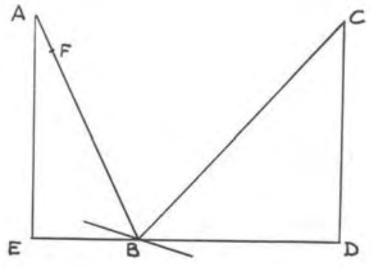
PROPOSICIÓN III: Los espacios recorridos por un grave en dos tiempos cualesquiera, al principio de los cuales comienza la caída, están en razón doble de los tiempos, es decir, están entre sí como los cuadrados de los tiempos, o lo que es lo mismo, como los cuadrados de las velocidades

PROPOSICIÓN IV: Si un grave continua su movimiento subiendo con la velocidad adquirida al final de una caída, recorrerá hacia arriba, en las mismas porciones iguales de tiempo, los mismos espacios que antes durante la caída, y se eleva a la misma altura desde la cual ha caído. Además pierde en porciones iguales de tiempo variaciones constantes de velocidad.

La siguiente proposición, la quinta, establece el mismo resultado que la segunda y, tal como afirma Huygens, «había sido demostrada por Galileo en los *Discorsi*», pero de una manera «imperfecta»; así que «nosotros la demostraremos de nuevo». Estamos ante una manifestación de las extraordinarias habilidades matemáticas de Huygens. En efecto, Galileo demuestra esta proposición haciendo uso de *agregados* de infinitos segmentos que forman una superficie con la que se identifica el espacio recorrido; mientras que Huygens lo hace en el más puro estilo arquimediano, es decir, usando el método de exhausción para evitar todo tipo de intervención del infinito en la demostración, lo que le confiere cierto rigor.

Después de estudiar el movimiento vertical, siguen a continuación varias proposiciones referidas al movimiento de caída a lo largo de planos inclinados. Es significativa la observación hecha por Huygens, refiriéndose a la siguiente proposición «[...] que Galileo pretendía evidente por si misma», es decir, un axioma; y, sin embargo, «[...] no será difícil de demostrar»:

PROPOSICIÓN VI: Las velocidades de los graves adquiridas descendiendo a lo largo de diversos planos inclinados son iguales si las alturas de dichos planos son iguales.



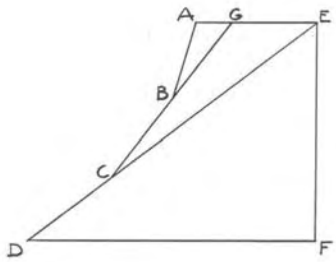
De nuevo la reducción al absurdo: Si afirmamos que cayendo según CB, adquiere una velocidad menor que cayendo a lo largo de AB, entonces podemos decir que existe un punto F, más bajo que A, tal que la velocidad adquirida a lo largo de FB es igual a la adquirida a lo largo de CB, y entonces el móvil tendría que poder subir el segmento BC después de haber caído de FB, pero esto es absurdo, pues no puede subir a una altura más alta que la de partida.

PROPOSICIÓN VII: Los tiempos de descenso a lo largo de planos inclinados de longitudes diversas pero de la misma altura están entre sí como los longitudes de los planos inclinados.

A continuación se presenta una proposición extremadamente importante para la geometrización del movimiento:

PROPOSICIÓN VIII: Si un móvil desciende desde cierta altura con un movimiento continuo sobre diversos planos inclinados contiguos tan numerosos como se quiera y con inclinaciones diversas, adquirirá al final del descenso la misma velocidad que hubiese adquirido cayendo verticalmente desde la misma altura:

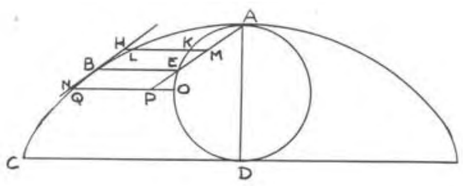
Sean los planos inclinados contiguos AB, BC y CD, pues bien, esta proposición afirma que si un cuerpo cae a lo largo de ellos, adquirirá al final de la caída, la misma velocidad que si hubiese caído verticalmente a lo largo de EF:



De aquí se deduce que esta propiedad se seguirá cumpliendo si el móvil cae a lo largo de una curva cualquiera pues, «[...] *en efecto, está permitido considerar a las curvas como compuestas de una infinidad de segmentos de recta*» (*H.O.*, parte 2ª, pg. 34). Entramos así en uno de los grandes problemas de la geometría de las curvas: la determinación de la tangente, pues los segmentos de recta que «componen» las curvas no son sino segmentos de sus tangentes.

Siguen una serie de resultados geométricos destinados a la obtención de la tangente a la cicloide en un punto cualquiera que cristalizan en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN XV: Dado un punto cualquiera de la cicloide, trazar la tangente por dicho punto.



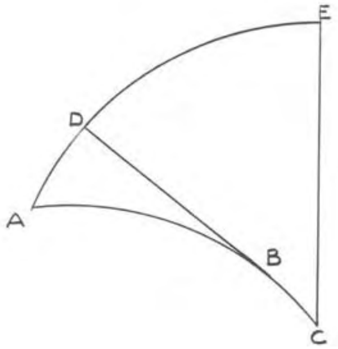
A partir de aquí Huygens realiza una espectacular combinación de conocimientos para llegar a la demostración de la propiedad fundamental de la cicloide, la tautocronía, estrechamente ligada al desarrollo de su reloj. En efecto, combinando las leyes de la caída de los cuerpos, con la aproximación de una curva por medio de segmentos de tangente, la teoría de las proporciones y los métodos de demostración indirecta, propios de Arquímedes, llega a la proposición fundamental de esta parte:

PROPOSICIÓN XXV: Los tiempos de descenso a lo largo de una cicloide de eje vertical, desde cualquier punto de la misma hasta el punto más bajo, son todos iguales; y la razón entre este tiempo y el de caída a lo largo del eje vertical es igual a la razón entre una semi-circunferencia y su diámetro.

Es decir, si hacemos caer un cuerpo a lo largo de una cicloide tarda siempre el mismo tiempo en llegar al punto más bajo, independientemente del punto desde el que caiga, o lo que es lo mismo, la cicloide es *tautócrona*. Si aplicamos esto a los péndulos, podemos afirmar que un péndulo que oscile siguiendo una cicloide invierte siempre el mismo tiempo en cada oscilación, independientemente de la amplitud de estas. Pero, ¿cómo hacer que un cuerpo suspendido oscile según una cicloide?

3ª PARTE DEL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM*
DEL DESARROLLO DE LAS LÍNEAS CURVAS

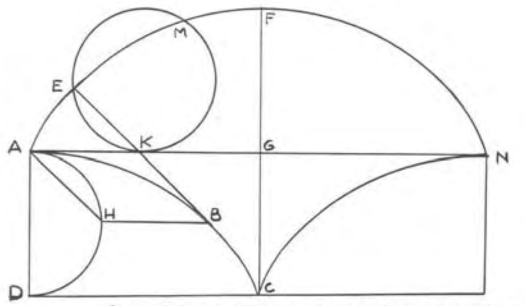
Imaginemos un hilo enrollado a lo largo de una curva AB y tal que uno de sus extremos permanezca fijo a un punto C. Si ahora desenrollamos el hilo, manteniendo siempre tensa la parte de hilo ya desenrollada, entonces el extremo D del hilo describirá otra curva AE.



He aquí el movimiento produciendo nuevos objetos geométricos. De la curva recorrida por el extremo del hilo que se «desarrolla» podemos decir que es *descrita por desarrollo* (décrite par déroulement), y la curva sobre la que está arrollado el hilo la llamamos *desarrollada* (déroulé). Actualmente estas curvas se llaman *evoluta* e *involuta.*

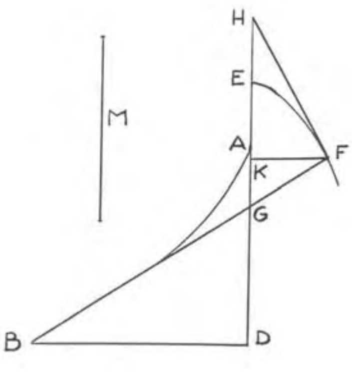
Entre la desarrollada y la desarrollante se establecen relaciones geométricas muy estrechas, como, por ejemplo, que la tangente a la primera en uno de sus puntos siempre es la normal a la segunda en alguno de los suyos. Este tipo de relaciones permite resolver problemas relacionado con la rectificación de algunas curvas, como la cicloide y la parábola y, sobre todo, nos conduce a algunos resultados relacionados con la construcción del reloj:

PROPOSICIÓN VI: Si desarrollamos una semi-cicloide, comenzando desde el vértice, obtenemos otra semi-ciclode igual a la desarrollada, cuya base se encuentra sobre la recta tangente a la desarrollada por el vértice.



Esto significa que si hacemos oscilar un péndulo entre dos arcos de cicloide, su extremo recorrerá también una cicloide, ¡que como sabemos es tautócrona!

PROPOSICIÓN VIII: Mostrar que una parábola es descrita por el desarrollo de cierta línea:



4ª PARTE DEL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM* DEL CENTRO DE OSCILACIÓN

«El gran sabio Mersenne me propuso hace tiempo, siendo yo casi un niño, al igual que a otros, investigar los Centros de Oscilación, cuestión esta muy famosa entre los geómetras de entonces, por lo que he revisado las cartas que me envió, así como las editadas por Descartes recientemente [...]». Así se expresa Huygens al principio de la cuarta parte del *Horologium*, dedicada al estudio del movimiento de los péndulos, en el que se basan los mecanismos reguladores de los relojes y cuya geometrización era fundamental para la medición precisa del tiempo. Como en otras ocasiones, podemos ver aquí la increíble capacidad de Huygens para transformar en *mecanismo* geométrico un hecho físico. En este caso transforma el movimiento de oscilación de un cuerpo suspendido, es decir, un *péndulo compuesto*, en el de oscilación de un punto simple, dotado de gravedad que gira alrededor de un eje describiendo arcos de circunferencia, o lo que es lo mismo, un *péndulo simple*. El péndulo simple es el mecanismo geométrico que describe el hecho físico consistente en el movimiento de vaivén de un cuerpo cualquiera suspendido. Dos conceptos son fundamentales en esta descripción. Uno había sido estudiado ya por Arquímedes, autor conocido y admirado por Huygens desde su juventud, en su libro *Sobre el equilibrio de las figuras planas*, y es el concepto de *centro de gravedad*, entendido como punto donde se supone concentrada la gravedad de un cuerpo compuesto de diversas partes. El otro es el de *centro de oscilación* y su estudio es el objetivo de esta parte del *Horologium*.

Comienza esta parte con el enunciado de trece definiciones, entre las que destacan las de péndulo compuesto, eje de oscilación, péndulo simple, péndulos isócronos, plano de oscilación, línea de centro, centro de oscilación, etc. A continuación se presentan algunas de estas:

DEFINCIÓN I: Se llama péndulo a cualquier figura dotada de gravedad y suspendida de tal manera que pueda continuar un movimiento de vaivén alrededor de un eje que se considera paralelo al horizonte.

DEFINICIÓN II: Este eje paralelo al horizonte alrededor del que se hace el movimiento se llama *eje de oscilación*.

DEFINICIÓN III: Se llama péndulo simple a aquel que consiste en un hilo inflexible y sin gravedad y que lleva en su parte baja un peso fijo, de manera que la gravedad de este peso debe suponerse concentrada en un punto.

DEFINICIÓN IV: Se llama péndulo compuesto a aquel que consiste en varios pesos que conservan inmutables las distancias tanto entre ellos como con el eje de oscilación. De aquí que podamos llamar péndulo compuesto a cualquier figura suspendida dotada de gravedad, en tanto que es divisible por el pensamiento en tantas partes como se quiera.

DEFINICIÓN V: Se llaman *isócronos* a los péndulos que en sus oscilaciones recorren arcos semejantes en tiempos iguales.

DEFINICIÓN VI: Se llama *plano de oscilación* al plano que pasa por el centro de gravedad de la figura suspendida y que es perpendicular al eje de oscilación

DEFINCIÓN VII: La *línea de centro* es la recta que pasa por el centro de gravedad de la figura y es perpendicular al eje de oscilación.

DEFINCIÓN VIII: La línea de *fil à plomb* (plomada, vertical) es una recta contenida en el plano de oscilación que es perpendicular al plano del horizonte y corta al eje de oscilación.

DEFINICIÓN IX: Se llama *centro de oscilación* (o de *agitación*) de cualquier figura a un punto de la línea de centro tal que dista del eje de oscilación una distancia igual a la longitud del péndulo simple isócrono a la figura.

A continuación aparecen dos hipótesis relacionadas con el centro de gravedad:

HIPÓTESIS I: Si cualquier número de pesos comienzan a ser movidos por la fuerza de su gravedad, el centro de gravedad del conjunto no puede elevarse más arriba del lugar en el que se encontraba al principio.

HIPÓTESIS II: Si despreciamos el aire y otros obstáculos evidentes, el centro de gravedad del péndulo agitado recorre arcos iguales en el descenso y en el ascenso.

Siguen una serie de proposiciones cuyas demostraciones se basan en las hipótesis anteriores y que permiten obtener un péndulo simple isócrono a uno compuesto. Esto tenía una gran utilidad práctica. Como sabemos, el periodo de oscilación de un péndulo simple depende de su longitud; ahora bien, si tenemos un cuerpo cualquiera oscilando y queremos estudiar su periodo de oscilación, debemos encontrar el péndulo simple isócrono (aquel cuya longitud está determinada por el centro de oscilación). Esta idea la llevó a la práctica Huygens añadiendo un pequeño peso móvil en los péndulos de sus relojes. Moviendo dicho peso se modifica el centro de oscilación del conjunto, con lo cual cambia la longitud del péndulo simple correspondiente y, en consecuencia, cambia también el periodo de oscilación del conjunto. Esto permitió mejorar la precisión de los relojes.

A modo de ejemplo, se presentan dos de estas proposiciones; la primera, que permite determinar el centro de gravedad, y la quinta, relativa al centro de oscilación:

PROPOSICIÓN I: Si por los centros de gravedad de cada uno de los pesos que se quiera, situados al mismo lado de un plano, se trazan perpendiculares a este plano; éstas perpendiculares multiplicadas por los pesos respectivos suman lo mismo que la perpendicular trazada por el centro de gravedad de todos los pesos hasta el mismo plano multiplicada por todos los pesos.

PROPOSICIÓN V: Dado un péndulo compuesto de cualquier número de pesos, si cada uno es multiplicado por el cuadrado de la distancia al eje de oscilación y que la suma de estos productos se divide por la suma de los productos de cada peso por la distancia al del centro de gravedad común a todos al eje de oscilación, obtenemos la longitud del péndulo simple isócrono al compuesto; es decir, la distancia entre el eje de oscilación y el centro de oscilación del péndulo compuesto.

Ahora estamos en condiciones de determinar la longitud del péndulo que «bate segundos» (péndulo que emplea un segundo en una oscilación), dado que añadiendo una masa adicional a un péndulo podemos hacer variar la posición de su centro de oscilación o, lo que es lo mismo, la longitud del péndulo simple correspondiente, hasta que un cierto número de oscilaciones coincida con el número de segundos correspondiente a determinado movimiento conocido de una de las estrellas fijas. Aún más, esto nos permite, según Huygens determinar una medida de longitud universal y perpetua:

PROPOSICIÓN XXV: Sobre la determinación racional de una medida universal y perpetua.

Ahora estamos en condiciones de construir un péndulo cuyas oscilaciones determinen un segundo (una división segunda) y, evidentemente, esto puede hacerse en cualquier país, tanto en el presente como en el futuro. Si tomamos la longitud de este péndulo y la dividimos en tres partes iguales, diremos que cada una de estas partes es un *Pie de las Horas*, que, efectivamente, puede ser considerada como unidad universal de longitud.

Esta parte termina con la proposición XXVI en la que se describe cómo se puede usar un péndulo para determinar el espacio recorrido por un cuerpo que cae, partiendo del reposo, durante el primer segundo de la caída; o, lo que es lo mismo, cómo se determina la constante de la gravedad.

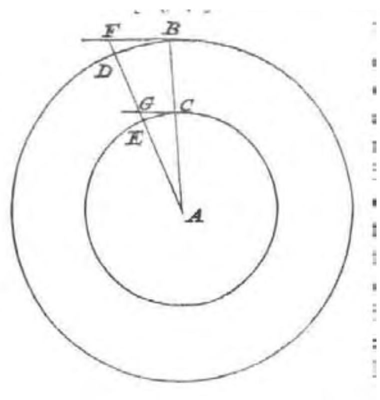
5ª PARTE DEL *HOROLOGIUM OSCILLATORIUM* QUE CONTIENE LA CONSTRUCCIÓN DE OTRO RELOJ DEDUCIDA DEL MOVIMIENTO DEL PÉNDULO CIRCULAR Y LOS TEOREMAS DE LA FUERZA CENTRIFUGA.

La última parte del *Horologium* comienza describiendo un nuevo género de movimiento oscilatorio llamado péndulo circular, que, junto con las propiedades de la parábola y su evoluta, descritas en la 3ª parte, y algunos de los teoremas relativos a la fuerza centrífuga, presentados a continuación, permite el diseño de un nuevo reloj.

El libro termina con los enunciados, sin ningún tipo de demostración, de trece teoremas relativos a la Fuerza Centrífuga del movimiento circular. Antes de presentar los teoremas, Huygens afirma que las demostraciones serán publicadas en el futuro. Pero esto nunca lo hizo. Sus amigos Volder y Fullenius reconstruyeron las demostraciones, a partir de los manuscritos de Huygens y las recogieron en un libro titulado *De Vi Centrífuga*, contenido en una obra mayor llamada *Opuscula Postuma*, que fue publicada en 1703 en Leyden.

Algunas de estas proposiciones son:

PROPOSICIÓN I: Si dos móviles iguales recorren circunferencias distintas en tiempos iguales, la fuerza centrífuga en la circunferencia mayor será a la fuerza centrífuga en la menor, como las longitudes de la circunferencia mayor es a la longitud de la menor; es decir, como la razón entre sus diámetros.



Consideremos dos circunferencias cuyos radios son AB y AC a lo largo de las cuales se mueven dos móviles iguales que emplean tiempos iguales en cada revolución.

Tomemos sobre cada una de ellas dos pequeños arcos semejantes BD y CE y sobre las tangentes en los puntos B y C las distancias BF y CG iguales cada una al arco correspondiente. El móvil que gira siguiendo la circunferencia BD tiene una tendencia a alejarse del centro en la dirección de su radio con un movimiento naturalmente acelerado que le haría recorrer el espacio DF en un cierto intervalo de tiempo; el que recorre la circunferencia CE, tiene una tendencia similar, en virtud de la cual recorrería el espacio EG en el mismo tiempo. En consecuencia en la circunferencia más grande el hilo está tenso tanto más fuerte que en la pequeña como DF es más grande que EG. Ahora bien, FD es a GE como BF es CG, es decir, como BA a AC. La fuerza centrífuga correspondiente a la circunferencia más grande es a la correspondiente a la más pequeña como sus circunferencias o como sus diámetros, que es lo que había que demostrar.

PROPOSICIÓN V: Si un móvil recorre una circunferencia con la velocidad constante que adquiriría al caer de una altura igual a la cuarta parte de su diámetro, tendría una fuerza centrífuga igual a su gravedad; es decir, que tiraría de la cuerda que lo mantiene sobre la circunferencia con una fuerza igual a la que ejercería sobre la cuerda si estuviese suspendido.

Se podría decir que esta última proposición condensa gran parte del programa de investigación de Huygens. En efecto, por medio de una elegante construcción geométrica prueba que el espacio recorrido por un móvil que cae en el primer instante de su caída es igual al espacio que recorrería el mismo móvil a causa de la fuerza centrífuga durante el mismo tiempo si, girando sobre una circunferencia con la velocidad adquirida al caer de una altura igual a un cuarto del diámetro, se desprendiera y continuara una trayectoria rectilínea. Como estos espacios son iguales, también serán iguales los *conatus* de las fuerzas que los producen. Estamos ante un ejemplo paradigmático de cómo la *fábula mecánica*, traducida a *fábula geométrica*, permite la evaluación de una fuerza por medio de otra; pero realizar esta traducción obligó a Huygens a medir «fuerzas» por medio de «distancias recorridas», lo cual presenta muchos problemas, como intuyó Leibniz, quien tuvo que abandonar la Matemática, después de haber alcanzado los más altos niveles en esta disciplina, para volver a la Metafísica.

BIBLIOGRAFÍA

-DESCARTES, R., *El Mundo o el Tratado de la Luz*, Alianza, Madrid 1991.

-HUYGENS, C., *Traité de la Lumière*, introducción de Micel Blay, Dunod, París 1992.

-HUYGENS, C., *Horologium Oscillatorium*, traducido del latín al francés y anotado por Jean Peyroux, Burdeos 1980.

-HUYGENS, C., *De Vi Centrifuga* (*Opuscula Postuma*), editado por Volder y Fullenius, Leiden 1690.

-DUGAS, R., *A History of Mechanics*, Dover, Nueva York 1988.

-YODER, J., *Unrolling Time,* Cambridge University Press, Nueva York 1988.