Leibniz-L'Höpital y el Cálculo diferencial

JAVIER DE LORENZO MARTÍNEZ
Universidad de Valladolid

«Il y a longtemps que je sais que vous étes universel [...]»
(L'Höpital a Leibniz, 1693)

El Hacer científico exige la existencia de figuras radicalmente creadoras como Leibniz, Huygens, Newton... Pero también de otras que, sin ser radicalmente creadoras, logren plasmar en corpus organizado aquello que los creadores construyen pero que, en muchas ocasiones, dejan en esbozo. Y no sólo en corpus organizado, sino que desarrollen las ideas originales, las divulguen, las apliquen a otros campos y disciplinas. Las invenciones originales no son admitidas sin más, tardan en ser aceptadas, asimiladas, incorporadas al bagaje común científico. Pueden ser, incluso, combatidas, mal interpretadas, en los primeros momentos. Su admisión, su correcta comprensión, su incorporación al saber común científico es labor no ya de su o sus creadores, sino de otras figuras, imprescindibles, que suelen quedar en segunda o tercera fila en las historias de la ciencia al uso, y muchas más veces en el anonimato.

Desde esta idea voy a considerar una de las invenciones más potentes de la praxis científica: el Cálculo diferencial e integral. Invención que tiene fecha fundacional pública, 1684, en el ensayo de Leibniz *Nova methodus*. Fecha a la que hay que agregar la de 1696 cuando aparece, sólo doce años después, el primer tratado o manual de esta nueva disciplina: *Análisis de los infinitamente pequeños* cuyo autor es el marqués Guillaume de L'Höpital. Desde esta idea me centro en la correspondencia L'Höpital-Leibniz para analizar la creación de Leibniz. A través de esta correspondencia se muestran algunos rasgos de lo que compone el *individuo* Leibniz, se descubre la génesis del Cálculo, el papel que su autor le atribuye dentro del total de su obra, sus *olvidos* del mismo... Y también la influencia que L'Höpital tuvo en la realización de algún interés vital de Leibniz así como de sus manifestaciones públicas o privadas respecto al Cálculo y su ontología subyacente.

Con ello pretendo, a la vez, rendir homenaje y recuerdo a L'Höpital, y no por cumplirse el tercer centenario de su muerte –fallece el 2 de Febrero de 1704–, sino por el papel básico que figuras como la suya tienen para la praxis científica y que también deben tener su reconocimiento.

EL «INDIVIDUO LEIBNIZ» Y SU SUEÑO

1. Un libro como el que publica L'Höpital no lo compone Leibniz. Los libros no son para su estilo: los que escribe son siempre de réplica o, en todo caso, de diálogo; prefiere el opúsculo, la correspondencia en la que agregar apéndices o adenda como ensayos originales que pueden y a veces se publican como tales... Algo que reconoce de modo explícito ya en 1706 cuando a petición expresa de Jean Bernoulli publica una Nota para aclarar que es él quien ha inventado el *nuevo cálculo*. El motivo, el elogio fúnebre que Fontenelle hace en la Academia de Ciencias de París a Jacques Bernoulli y donde Fontenelle le atribuye junto a su hermano Jean la invención, desarrollo y exposición del Análisis infinitesimal. Leibniz, tajante, afirma:

> «Habiendo encontrado mi nuevo cálculo desde el año 1674, estuve largo tiempo sin hacer aparecer nada, porque habiendo vuelto de Francia a Alemania, tuve ocupaciones y trabajos que me apartaron. El tema merecía una Obra especial, y yo no tenía todo el tiempo que exigía para responder a mis proyectos y a la atención del Público, *además de que siempre he tenido dificultad para trabajar sobre lo que ya tenía en mi poder, deseando establecer muchas otras vías de naturaleza muy diferente que yo podría quizá algún día comunicar al Público*... (MS V, 390, sub. mío)»

Leibniz tiene mil y mil proyectos en todos los campos: políticos, religiosos, geológicos, industriales, alquímicos, biológicos, filosóficos, científicos, jurídicos... Proyectos, todos, con un denominador común: ser reflejo de un único *Ars inveniendi*. Un *Ars* siempre buscado pero nunca materializado en corpus cerrado, quizá por el recuerdo del método cartesiano en el que se establecen bellos preceptos con los que inventar y descubrir, reglas con las cuales se dice que se obtiene todo pero que, en el fondo, no dan la invención ni el descubrimiento de nada. Como cuenta en carta a Galloys de 21 de Febrero de 1677, poco después de su llegada a Hannover,

> «Descartes ha sido un gran hombre sin duda, pero creo que lo que nos ha dado de aquello (¿) es más bien efecto de su genio que de su método, porque no veo que sus seguidores hagan descubrimientos. (MS I, 181)»

La invención no tiene reglas, como ha descubierto Leibniz muy pronto, sino visiones o iluminaciones y trabajo, con aciertos pero también con sus errores y fallos.

Por otro lado, la materialización, aunque parcial, de su proyecto básico exige realizar cálculo en distintos frentes y a Leibniz –el creador del Cálculo diferencial, de la Característica numérica universal, de la formalización numérica de los silogismos, de la Aritmética binaria...– los cálculos le incomodan. Es una queja constante que también explicita en su correspondencia con L'Hopital; así, cuando recibe el libro de este, de inmediato escribe:

> «Para mí encuentro sobre todo que los cálculos me incomodan, incluso cuando son muy pequeños. Mi espíritu lleno de otras cosas no se somete a la atención que es necesaria, lo que me hace equivocar en todos los momentos [...] (MS. II, 319)»

Un espíritu lleno de otras cosas que le llevan a otra constante, la petición de colaboradores que materialicen lo que él inventa pero deja en borrador, que calculen lo que él no calcula porque se equivoca permanentemente al no prestar la atención exigida. Algo obsesivo esa búsqueda de colaboración de la que carece en Hannover y que sí parece que tuvo en París, un París siempre añorado. Colaboración que Leibniz está dispuesto a pagar, porque supone un trabajo que no ve únicamente a su servicio. Colaboración que le evite el error y, sobre todo y quizá fundamental, que posibilite la culminación y materialización de sus ideas, de los proyectos que tiene en mente sobre las distintas características, particularizaciones de una misma. Petición de colaboradores que hagan un uso inteligente de las ideas que él aporta.

En la no plasmación de su *Ars inveniendi*, con todas las secciones imaginadas e imaginables, no sólo se encuentran sus múltiples ocupaciones, su horror al cálculo, los posibles errores en el mismo. Quizá se refleje algo más profundo y es el carácter de Leibniz. Lo que reconoce de modo explícito cuando escribe

> «No he podido condenarme nunca a una sola especie de trabajo, el cambio me ha servido de alivio. (OP, 574)»

Y quizá algo más: Leibniz –el creador matemático– en el fondo no se siente puramente matemático, sino que la Matemática se le presenta como un medio, un instrumento para cristalizar su sueño. La matemática es ejemplo y modelo para sus intentos formalizadores, que le son más interesantes que la matemática en sí. Como escribe a la condesa Elisabeth

> «No me encariñaba con las matemáticas sino porque encontraba en ellas la huella del *arte de inventar en general*. (Subr. del autor. Echeverría, p. 129)»

Huellas del arte de inventar que quizá se pudieran trasladar por analogía a otros campos, fundamentalmente a los de Metafísica y Moral, en los cuales, y frente a las pretensiones de Espinosa,

> «No es tan fácil como se piensa dar verdaderas demostraciones en metafísica. (MS, I, 179)»

A pesar de lo cual afirma en carta a L'Höpital de 27 de Dcbre. de 1694,

> «Mi metafísica es toda matemática por decirlo así o se la podría transformar en ella. (MS II, 258)»

En esta línea le llega a confesar en Set. de 1695

> «Hace largo tiempo que pienso en un medio de dar algunas demostraciones rigurosas en metafísica (id. 300)»

Con la precisión de que esa matemática a la que se refiere queda bajo una perspectiva que corresponde al *sueño Leibniz*. De hecho, cuando llega a París en Marzo de 1672 en misión diplomática como consejero de la corte suprema del Electorado de Maguncia, Leibniz ignora todo de la Matemática. Ni ha leído los *Elementos* euclídeos, ni conoce la obra geométrico-algebraica cartesiana, ni ha oído hablar de Barrow, de Wallis, de Pascal, de Newton [...] Desconocimiento matemático reconocido por los matemáticos de su época, pero también, honestidad obliga, por el mismo Leibniz tras su estancia en Londres en 1673 por lo que intentará superarlo de modo inmediato a su regreso a París. Ignorancia que quizá se encuentre en la base de las disputas posteriores con los matemáticos ingleses que, habiendo visto las lagunas matemáticas de Leibniz en 1673, se nieguen a aceptar que sea capaz de inventar, por sí y sin más, en matemática: para los miembros del círculo de Newton un diplomático alquimista, ignorante y ambicioso, no inventa o crea, copia.

Su ambición tiene, sin embargo, dos cartas a su favor: el pronto conocimiento de Huygens quien le va a orientar en su aprendizaje científico, y una convicción muy profunda que había apuntado en *De Arte Combinatoria* de 1666: representar por medio de notaciones, de caracteres convenientes tanto los términos como las relaciones que estos tienen entre sí. Convicción o más bien obsesión la permanente búsqueda e interés en las notaciones, en los caracteres que reemplacen a los conceptos, a los términos y, mediante esos caracteres y a través de una combinatoria lineal, representar todos los conocimientos. Es lo que califico *sueño de Leibniz*: obtener una Característica universal que pueda plasmarse, incluso, en máquinas, como la máquina aritmética que hace fabricar en París para facilitar el cálculo, es decir, el razonamiento.

Una convicción reforzada en su juventud por la lectura de Hobbes, uno de los matemáticos en los cuales había aprendido lo poco que sabe de la matemática de la época antes de su llegada a París. Pero en Hobbes, Leibniz encuentra algo más que esa escasa matemática. En *De Corpore*, 1655, Hobbes había escrito en la sección *Computatio sive Logica*:

> «Por razonamiento entiendo cálculo [...] todo razonamiento se basa sobre esas dos operaciones del espíritu, la suma, la sustracción.»

Dos operaciones, suma y sustracción, claves para la combinatoria de nuestra razón, para el cálculo en que consiste el razonamiento. Idea no sólo de Hobbes, ciertamente, sino que estaba en el ambiente, en la búsqueda de una compensación a la *torre de Babel* en que se había visto sometida la especie humana. Idea que también explicitó Descartes cuya carta de 20 de Noviembre de 1629 a Mersenne copia Leibniz hacia 1678. Copia a la que Leibniz agrega que la invención de una lengua o al menos una escritura para expresar los pensamientos sería algo maravilloso sobre todo para acabar las disputas que dependen del razonamiento; porque con esa lengua o escritura razonar y calcular serían lo mismo.

Como cuenta en la carta a Galloys ya citada, en su viaje de regreso desde París a Hannover –donde llega en Diciembre– pasa por Londres y de ahí por Amsterdam para entrevistarse con Espinosa, pero vientos contrarios lo retienen en el Támesis varios días.

> «Y no sabiendo qué hacer y no teniendo en el barco más que a los marineros, medité sobre algunas cosas y sobre todo pensé en mi viejo proyecto de una lengua o escritura racional, cuyo menor efecto sería la comunicación de las diferentes naciones. Su verdadero uso sería *pintar* no la palabra (.) sino *los pensamientos*, y hablar al entendimiento más que a los ojos. Porque si la tuviéramos tal y como la concibo, podríamos razonar en metafísica y en moral casi como en Geometría y Análisis, porque los Caracteres fijarían nuestros pensamientos muy vagos y volátiles en esas materias, donde la imaginación no nos ayuda, si no fuera por medio de caracteres. (MS I, 180-1) (Subr. mío)»

Términos que repite casi textual en carta al duque de Hannover en 1679 al pedir ayuda para el proyecto de una Característica universal de la cual el Álgebra o la Aritmética no son más que muestras elementales ya que

> «Todo el mérito de las ciencias abstractas descansa sobre las marcas abreviadas de la palabra y la escritura, y esas marcas hacen que podamos calcular el término y la suma de una progresión cualquiera de golpe, aunque no recorramos todos los términos uno a uno; que podamos mostrar un término finito igual al infinito mismo y otras cosas de este género que causan sorpresa a quines no comprenden la razón de las cosas. (COF, 257)»

Palabras que son huella de su cuadratura del círculo donde ha obtenido el valor de π por la serie infinita, la *serie de Leibniz*,

$$\pi = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$$

donde hay que tomar la serie entera, en bloque, para que defina el número π porque, de lo contrario, sólo daría una aproximación al mismo y dejaría de ser, por ello, el número definido. Una huella, mostrar un término finito igual al infinito, imborrable en Leibniz a pesar de las críticas por el poco valor de la serie –converge muy lentamente como explicitaría Newton y reconoce Leibniz quien pretenderá encontrar otra serie de convergencia más rápida–, por la escasa originalidad en cuanto al método inventivo –sigue la línea geométrica de los matemáticos ingleses–. Huella imborrable que volverá permanentemente, y con estos mismos términos, a lo largo de su vida y a la que tratará de dar una base metafísica que termina encontrando en el infinito sincategoremático de la Escuela.

El sueño de Leibniz se materializa en la búsqueda de los elementos siguientes: una *Enciclopedia* que contenga todos los conceptos o términos con su definición real, es decir, un catálogo completo de ideas simples de las cuales se componen las restantes; en el fondo, una especie de alfabeto de los géneros supremos de los cuales surgen las demás ideas o nociones inferiores. La Enciclopedia ha de ir acompañada de una *Lingua characteristica* en la cual se reemplacen por caracteres los conceptos enumerados en la Enciclopedia. Esos caracteres no tienen por qué ser numéricos como se ve en las figuras geométricas o como ocurre en el Cálculo diferencial e integral, aunque la aritmetización directa de términos o propiedades monádicas así como de conceptos o relaciones de proposiciones en su enfoque intensional, terminará siendo uno de los proyectos más elaborados. Es el que plasma en su Característica numérica universal, intento de materializar numéricamente esa Lingua porque la misma es el auténtico, el verdadero método que

> «nos debe proporcionar un *filum Ariadnes*, es decir, un cierto medio sensible y palpable, que guíe al espíritu, como las líneas trazadas en geometría y las formas de las operaciones que se prescriben a los aprendices en Aritmética. (MS, I, 181)»

Lingua que, como buen hilo de Ariadna, lleve a un *Calculus ratiocinator* y al consecuente algoritmo que permita decidir, dirimir cualquier tipo de discusión, de disputa, ya que

> «Todos nuestros razonamientos no son más que relaciones y sustituciones de caracteres (PS VII, 31)»

Con una insistencia, aquí: la Característica Universal no es auxiliar del pensamiento, sino la condición misma del pensamiento porque es la que posibilita razonar o calcular, inventar, demostrar, decidir. He esbozado algunos rasgos que, por el principio de individuación, caracterizarán a Leibniz y que, de una u otra manera, se van a ir poniendo de relieve en su correspondencia con L'Höpital. He indicado que a su llegada a París en 1672, el joven diplomático ignorante en matemáticas, pero ambicioso, tiene dos cartas a su favor: su encuentro con Huygens y el sueño de obtener una combinatoria, un cálculo de caracteres que proporcionen el hilo de Ariadna con el que guiar al espíritu y lograr la invención.

L'HÖPITAL – LEIBNIZ: CORRESPONDENCIA

2. El marqués de L'Höpital pertenece al círculo de Malebranche que Leibniz frecuentó en París y con el que sigue manteniendo relaciones constantes y a veces no muy cordiales por considerar que como cartesianos se han constituido, realmente, en secta. Es un círculo que van a frecuentar figuras clave para la historia que aquí interesa porque se ligan a los temas de filosofía natural y, por supuesto, al nuevo cálculo: especialmente el abate Catelan, Varignon, el joven Jean Bernouilli, Jean Prestet... Relaciones que llevan a Leibniz a plantear en 1689 como problema, en controversia básicamente con Catelan, aunque piense que es, en el fondo, con el mismo Malebranche, determinar la curva isócrona por la cual desciende un cuerpo pesado sin aceleración. Aquí vuelven a entrar en juego las nociones de fuerza viva leibniziana frente a la de momento y a la ley de conservación de la cantidad de movimiento. En lo que aquí interesa este ensayo de Abril en *Acta Eruditorum* se hace clave para que Jacques Bernouilli se convierta al nuevo cálculo y de una solución al problema ya con este instrumento en 1690. Conversión que también provoca en su hermano Jean por lo que a partir de este momento los dos se hacen los portavoces del nuevo cálculo. Un cálculo que comienza a difundirse gracias, irónicamente, al celo de algunos cartesianos reunidos en "secta" alrededor de Malebranche [...]

Por recomendación de Malebranche L'Höpital –nacido en 1661– entra en contacto epistolar con Leibniz. Lo hace en carta que fecha el 14 de Diciembre de 1692 y que a Leibniz le llega a primeros de 1693. Carta de presentación en la cual L'Höpital, tras los saludos de rigor, agrega unos problemas y, en especial, da cuenta de la rectificación de la curva logarítmica que ha obtenido por el nuevo método creado por Leibniz. Carta de presentación que implica un claro dominio de ese nuevo método; no es la presentación de un aficionado sino que corresponde a uno de los matemáticos de prestigio del círculo de Malebranche.

Se inicia una correspondencia relativamente breve pero de gran riqueza. Un ejemplo en el que se manifiesta cómo se iba elaborando la Ciencia Europea en esos momentos. En esta correspondencia, además de temas estrictamente matemáticos, centrados en el Nuevo método de Leibniz, se entrecruzan cuestiones de Dinámica con discusiones en torno a las energías cinética y potencial o al momento; la separación entre espíritu y cuerpo y si la misma es motivo para la ocasión de la acción divina o reflejo de la armonía preestablecida; se habla de cuerpos como el fósforo y sus propiedades; desfila todo un cuadro de personajes con referencia a sus obras como La Hire, Tschirnhaus, Cassini, Wallis, Hudde, Newton... y, sobre todos –aparte Malebranche– Huygens, que con los hermanos Bernoulli, Jacques y Jean, ocupan el papel central. Hay anécdotas como informar de que la firma *Remi Lochel*, autor de algunos ensayos en *Journal de Trevoux y* en el *des Savants* es el anagrama de Michel Rolle, conocido hoy únicamente por el *teorema de Rolle*. Se habla de los personajes de las Academias y sus trabajos, pero también de viajes, herencias, enfermedades –Leibniz está siempre de viaje, al igual que L'Höpital, quien suele caer constantemente enfermo- con reflexiones muy críticas sobre los atrasos y vergüenza para los médicos al no conseguir suprimir o al menos curar las enfermedades.

Correspondencia privada, pero sólo hasta cierto punto. Lo que en las cartas se escribe es para que quien las recibe lo difunda en su medio o por otra correspondencia. Supone un auténtico entrecruce con otros corresponsales y medios. Por mera ejemplificación, muy limitada, menciono el entrecruce con Huygens, aunque aparezcan muchas otras cartas, otros corresponsales...

El 12 de Enero de 1693 Huygens comunica a Leibniz que ha renovado, desde hace unos meses, su correspondencia con L'Höpital con motivo de un problema que le envió el marqués: encontrar una línea recta igual a la porción dada de una línea logarítmica sin otra ayuda que la línea misma. Y da cuenta de que L'Höpital ha resuelto satisfactoriamente una serie de problemas que él le ha ido planteando y lo ha hecho sirviéndose «correctamente de vuestro cálculo». Pero encuentra dificultades en un problema concreto, que transmite a Leibniz. Y en su respuesta de 20 de Marzo, Leibniz informa a Huygens que también a él le ha escrito L'Höpital dando la rectificación de la curva logarítmica y pasa a exponer, al hilo de las cuestiones planteadas por L'Höpital a Huygens, el procedimiento de hallar una curva pedida por series infinitas mediante su mecanismo del Cálculo diferencial.

Si Huygens no contesta a Leibniz hasta Septiembre es porque se ha concentrado en resolver algunas cuestiones y problemas *geométricos* que L'Höpital le ha planteado, en especial uno originado por Bernoulli. Y adjunta la solución que ha encontrado para que se publique en las Actas de Leipzig. Ante lo cual, Leibniz, el 11 de Octubre de 1693, escribe a Huygens

> «También he recibido cartas del marqués de L'Höpital a las que he respondido lo mejor que he podido. Pero mis distracciones no me han permitido darle la satisfacción que hubiera deseado [...]»

Y señalo la afirmación de Leibniz a Huygens, ya el 11 de Diciembre de ese mismo año, 1693, refiriéndose a L'Höpital:

> «Me extraña que es casi el único en Francia que entre en la Geometría profunda.»

Un entrecruce de cartas en las que, como ya he indicado, no sólo hay planteamiento y resolución de problemas, de Análisis infinitesimal, de esa Geometría profunda a la que se refiere Leibniz. Entrecruce de cartas que pone de relieve todo un panorama de qué y cómo se hace la Ciencia a finales del s. XVIII. Aquí debo limitarme a sólo alguno de los aspectos de esta correspondencia, a los que de algún modo afectan a Leibniz y su Cálculo diferencial.

La respuesta de Leibniz a L'Höpital, Enero de 1693, es radicalmente acogedora: ya lo conoce por sus trabajos, por referencias previas, por los mensajes de Huygens, por su solución al problema de Viviani. Nostálgico de sus cuatro años pasados en París, Leibniz reitera su soledad, la falta de ambiente que tiene en Hannover y justifica su relativo abandono de las matemáticas por sus múltiples ocupaciones: los derechos de los príncipes y la búsqueda sobre la historia de la casa de Brunsvich, la vida cortesana, las querellas teológicas y filosóficas en las que se encuentra inmerso, la necesidad de contestar al menos 30 cartas, sus continuos viajes. Ocupaciones que le llevan a exclamar:

> «Estoy de tal manera distraído, y dividido por otras cosas que ocupan el espíritu, que cuando vuelvo al Análisis, me parece que lo debo aprender todo de nuevo, y mis propios pensamientos me son ajenos. (MS II, 219)»

Abandono del Análisis al que parece volver únicamente como respuesta a los estímulos que le puedan llegar de otros, especialmente cuando alguno de los hermanos Bernouilli plantea algún problema a resolver. Estímulo que parece encontrar en la carta recibida y que le lleva a enumerar una serie de temas que tiene sin resolver, fundamentalmente la Perfección del Análisis de los Trascendentes en los cuales entra la consideración de algún infinito y que

> «Sería sin duda la más importante a causa de la aplicación que se puede hacer a las operaciones de la naturaleza, que hace entrar el infinito en todo lo que hace. (MS II, 219)»

Cuenta su proyecto de algunos Métodos para generalizar los particulares que se tienen en la ecuación tangencial o ecuación diferencial de primer grado. Proyecto cuya realización exigiría la ayuda y colaboración de algún matemático y, de modo implícito, y sin más –es la primera carta que envía a L'Höpital- le requiere para tal papel. Naturalmente, endulza la petición con la promesa de resolver personalmente la citada curva logarítmica con

> «mi manera muy cómoda de aplicar el cálculo diferencial»

Aunque reconoce que tiene que volver a pensar en el tema y, sobre todo, «buscar en mis borradores».

Leibniz realiza una afirmación que reiterará en otras ocasiones y no sólo cuando surjan las querellas de prioridad con Newton en cuanto a la invención del cálculo. Afirmación que supone un halago para L'Hopital, al reconocerle un trabajo de primer rango y del cual le viene a asegurar que, aunque él lo demuestre, en ningún caso se atribuirá su descubrimiento:

> «Trataré de asegurarme de encontrar la demostración necesaria (.) Puedo prever si los teoremas que se me envían en esta materia son de tal naturaleza que puedo prometer la demostración. Sin embargo no digo que soy capaz de inventar todo lo que soy capaz de demostrar cuando se me comunica todo inventado. Hay diferencia entre esas dos cosas, que no es suficientemente considerada por aquellos que hacen gran ruido, cuando se ha encontrado la demostración de la invención de otro. (MS II, 223)»

Afirmación que va a ser tomada de modo casi textual por Jean Bernoulli cuando plantee en 1696 su reto al mundo matemático, al estilo Pascal, para que resuelvan el problema de la braquistócrona. Frase de Bernoulli que se ha venido interpretando como una acusación a los matemáticos británicos, en especial a Newton, de ser ellos los que utilizando la invención de otros –en este caso, el cálculo diferencial– consiguen resultados de los que alardean ser sus inventores originales. Afirmaciones que, por otro lado, son cotidianas entre los distintos autores de la época y, por ello, desde mi punto de vista, no hay que darles mayor importancia. Leibniz termina su contestación con el reconocimiento a Malebranche y el anuncio de una pronta carta para el mismo.

En su contestación desde París, 24 de Febrero de 1693, L'Höpital utiliza una expresión que personalmente asumo como una de las caracterizaciones atribuibles al «individuo Leibniz»:

> «hace tiempo que sé que sois universal. [..] (id. 223)»

L'Hopital sigue planteando problemas y, como de pasada, señala un error de Leibniz en un trabajo publicado en *Acta Eruditorum,* sobre que la curva cuya ecuación diferencial es $ad^2x=dy^2$ con dt constante es una logarítmica que tiene por subtangente la recta dada a -con dx tomado sobre el eje, dy en las ordenadas, dt como porciones de la curva iguales entre sí-. Justifica su afirmación mostrando dónde se encuentra el error y dando la solución correcta.

En la postdata, y refiriéndose a Prestet, se liga a uno de los temas más queridos de Leibniz: intentar resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado. Tema, el de teoría de números o Aritmética, donde incluye la resolución algebraica de ecuaciones, que trabajó desde su llegada a París siguiendo las líneas de Ozanam. Para ambos, y en esta correspondencia, se desprende que esa Teoría de números carece de un método general para encarar sus problemas; que, por otra parte, son siempre excesivamente particulares y no encierran posibles generalizaciones, que es lo que más importa en el arte matemático. En palabras de L'Höpital,

> «La ciencia de los números ha sido hasta aquí muy imperfecta, no se sabe incluso la naturaleza de los números primos, lo que se hace claro porque no se ha podido demostrar todavía que todo número primo mayor que la unidad que un número divisible por cuatro, esté compuesto de dos cuadrados enteros. (MS II, 233)»

Por supuesto, Leibniz no consiguió obtener la resolvente correspondiente aunque en ocasiones indique que en este campo a veces la mejor solución sería la demostración de la imposibilidad de hallar una respuesta positiva a las cuestiones planteadas. La contestación de Leibniz, tras reconocer que sus "distracciones son la causa de que me equivoque algunas veces":

> «No he podido encontrar mi borrador de entonces para ver la causa del error pero examinando la cosa encuentro que estando dy como los números, x son como los logaritmos; así creí, por precipitación, *oculorum errore,* que habría tomado y por dy. (id. 230)»

Lo que importa, más que los errores, también mencionados en otros casos por los Bernoulli y que Leibniz acepta de buen grado como errores siempre subsanables en estos terrenos, la búsqueda de la generalidad, pero también de ayuda. Con más insistencia, la carta de 28 de Abril comienza:

> «Si yo fuera capaz de acabar los Métodos que estoy dispuesto a proyectar, iríamos sin duda muy lejos [...]

Y Leibniz empalma con la necesidad de manejar los números imaginarios, imprescindibles para dar expresión a las raíces de las ecuaciones cúbicas frente a la opinión de Prestet. De modo sorprendente señala que no deben "prostituirse nuestros métodos" utilizándolos erróneamente, como hace algún sabio matemático en París. Y como observa que L'Höpital los maneja correctamente tras la construcción del problema de M. de Beaune, según ha publicado en *Journal des Savants*, le escribe

> «Es por lo que os informaré voluntariamente de mis métodos tanto para las Tangentes invertidas, como para otras cosas. (id. 238)»

¿Un método, acaso, el cálculo diferencial e integral, sólo para iniciados, por lo que no se dan al público en general explicaciones de las reglas del mismo, sino que simplemente se plantean problemas y se dan las soluciones?

En línea con ese deseo de informar de sus ideas, pero sólo a quienes pueden hacer uso adecuado de las mismas, Leibniz vuelve a insistir en su idea de la Característica universal. Así, escribe sobre la necesidad de que los caracteres reemplacen a los términos, ahora en vista de una *Characteristica situs*, ya que

> «una parte del secreto del análisis consiste en la característica, es decir, en el arte de emplear bien las notas de las que se sirve (MS II, 240)»

pero de la que sólo tiene por el momento bosquejos, aunque sería realmente útil por abarcadora y para la que requiere ayuda porque en ella se tendrían multitud de cálculos.

Característica de la situación que considera diferente del Álgebra y que permitiría, como ya escribió a Huygens en carta de 8 de Septiembre de 1679,

> «Representar al espíritu exactamente y al natural, aunque sin figuras, todo lo que depende de la imaginación (MS II 20)»

Incluso posibilitaría la descripción exacta de las cosas naturales, aunque su utilidad principal estaría en las consecuencias y los razonamientos que se pueden hacer por las operaciones de los caracteres. Su carácter universal es tal que se podría emplear para la descripción de máquinas, por complicadas que sean, sin emplear figuras. Elaboración de máquinas «mecánicas», otra constante en el pensamiento de Leibniz, a pesar de las dudas que manifestara Huygens al exponerle el tema.

Sin embargo, en esta carta de 28 de Abril de 1693, al hablar de la característica situs, Leibniz está, realmente, en terreno algebraico a pesar de sus palabras. Lo que plantea, desde una lectura actual, es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Para ello representa los coeficientes por pares de números tomados no como números en sí, no «como números verdaderos», sino como notaciones especiales para indicar su situación en la ecuación. Así, dirá que 2.3 no es 6 sino que debe leerse como ab. Para aclarar el tema pone un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Aquí escribo simplemente la primera de las expresiones de Leibniz

$$10 + 11x + 12y = 0$$

donde cada par de números indican

> «el primero me señala de qué ecuación es, el segundo me indica a qué letra pertenece. (MS II, 230)»

En términos actuales la expresión leibniziana habría que escribirla como

$$a_{10} + a_{11}\, x + a_{12}\, y = 0$$

Como su sistema es de tres ecuaciones con dos incógnitas, por eliminaciones sucesivas se llega a la conclusión de que para que exista solución ha de ser cero lo que hoy se calificaría de «desarrollo del determinante de los coeficientes». En otras palabras, Leibniz está mostrando a L'Höpital el concepto y manejo de los determinantes, aunque sin este nombre. Manejo para la resolución de los sistemas de ecuaciones. Aun en carta privada es la primera aparición de este concepto en el mundo occidental. De hecho, Leibniz volverá públicamente a este tema sobre sistemas de coeficientes, en otras dos ocasiones, en 1700 y 1710, con la misma notación que en esta carta y utilizando el término 'resultante' para algunas sumas combinatorias de un determinante, aunque en 1705 trate de que Hermann –a quien entonces ve como el posible joven matemático que pueda ser su colaborador– se interese sobre el tema, lo que ciertamente no consiguió.

La característica situs, aquí, realmente se refiere a cómo representar la situación de los coeficientes. De modo implícito, pero claro, se tiene en este enfoque la posibilidad de hablar de la posición de unas líneas, en el ejemplo dado rectas, gracias al estudio asociado del sistema de ecuaciones correspondiente. Característica de la situación, ciertamente, pero desde un enfoque en el fondo algebraico, en lo que hoy constituiría un inicio del Álgebra lineal. El 15 de Junio L'Höpital acepta que

> «el análisis no es más que el arte de abreviar los razonamientos y representar de un golpe al espíritu lo que no podría percibir de otra manera más que por un largo rodeo, es cierto que las características componen la parte principal (id. 241)»

y aunque parece entusiasmado con el proyecto de expresar la situación de las líneas y los ángulos por la característica situs anunciada no parece ver la aplicación de esa característica a la representación numérica porque de modo inmediato pasa a plantear dudas e intenta comparar el método de Fatio con el de Tschirnhaus para la invención de tangentes a curvas que tienen focos. A L'Höpital parece que el único campo o centro de interés en la Matemática es el Cálculo diferencial e integral como va manifestando reiteradamente en sus cartas. Sin embargo, y a continuación, pasa a temas de Mecánica. Se ofrece a aportar el dinero necesario para que algún modelo de la máquina mecánica pueda ser fabricado en París del modo que parece ser que se ha construido en Hannover por indicación de Leibniz, y quizá por el mismo obrero.

En carta fechada el día de San Andrés del último noviembre de 1694 L'Höpital comunica la posible edición de unos cuadernos sobre el cálculo diferencial. Cuenta que el origen de su interés por el tema se encuentra en el estudio de los ensayos de Leibniz en *Acta Eruditorum* desde unos seis años antes, estudio que le condujo a intentar la demostración de todas las reglas que no da Leibniz. Si, según escribe L'Höpital, este es el origen de los cuadernos, la posible publicación se debe a que esos cuadernos los han visto algunos amigos y, muy en especial, Malebranche. Es la insistencia de Malebranche, ante la cual no puede negarse, la que lleva a la edición. También comunica que Malebranche se ha quedado con un trabajo original suyo que estudia analíticamente las secciones cónicas e insiste igualmente en que también sea publicado. Como inciso diré que a la muerte de L'Höpital, Malebranche pide a Varignon que se haga cargo del manuscrito para editarlo. Varignon, animado por Leibniz que incluso le sugiere que vaya más allá de las Secciones cónicas escritas por L'Höpital, cumple el encargo y edita ese original con el título *Traitè analytique des sections coniques* que aparece en 1707, tres años después de la muerte de L'Höpital. Libro que se convirtió en otro texto de referencia, ahora en geometría...]

Han pasado diez años desde la publicación por parte de Leibniz del primer ensayo en el que dio a conocer su nuevo método. L'Höpital justifica la conveniencia de la publicación en varios puntos: hay algunos que, como Catelan, han compuesto y editado libros llenos de errores sobre la materia y, aunque parece manejar el cálculo, lo atribuye a Descartes olvidándose del verdadero creador; otros como Craig malinterpretan el cálculo y aunque aceptan la novedad de los caracteres leibnizianos, el resto lo atribuyen a influencia británica; pero la justificación básica es la de que es preciso dar a conocer todas las reglas de este nuevo método, reglas que Leibniz no ha dado, no ha explicitado en modo alguno. Y algo fundamental aunque lo exprese veladamente: Leibniz no se decide a publicar una obra completa sobre el nuevo método y se limita a breves ensayos en los cuales sólo se plantean y resuelven, a veces con errores, problemas. Una presión sobre Leibniz que no es sólo de L'Höpital: el 29 de Mayo de ese mismo año, 1694, Huygens le había pedido que escribiera un tratado "de los usos diversos de este cálculo" y le daba cuenta del último libro de Wallis, del prometido de Newton sobre el tema de Cálculo, como posibles incentivos...

Los cuadernos se limitan, por otro lado, a sólo el dato y aplicación del Cálculo diferencial sin ir más allá, es decir que

> «no toca en modo alguno la inversa de ese cálculo que es sin embargo lo que hay de más considerable. (MS II, 252)»

Ante la noticia de un hecho casi consumado, Leibniz contesta el 27 de Diciembre. Anima a la edición del libro e indica que él no avanza en su Análisis del infinito y con toda generosidad habla de «*nuestro* nuevo cálculo». Escribe:

> «Aunque tengo la intención de componer algo sobre nuestro nuevo cálculo y otras materias conexas, bajo el título de *Ciencia del infinito*, no voy sin embargo muy avanzado, y tengo la materia sin haberle dado aún forma alguna (MS II, 255)»

Vuelve a insistir

> «Además estoy tan poco versado en mis propios métodos a causa de las distracciones que me abruman algunas veces hasta dar un golpe sensible a mi salud, que no me encuentro apenas en estado de ponerlos a provecho [...] (id. 256)»

Y pide a L'Hopital que haga un uso mejor de las notas de otro que los autores mismos, autores que carecen de los recursos y talento del propio marqués. No encuentro ironía en las frases de Leibniz porque de modo permanente está requiriendo la colaboración de otros para que desarrollen sus ideas, efectúen los cálculos que a él le incomodan... Conoce, perfectamente, que Jean Bernoulli está detrás del trabajo de L'Höpital por las continuas quejas que el joven Bernouilli le hace llegar. Y a pesar de ello anima a L'Höpital a que haga uso de las notas de otro, un otro que es él mismo en el fondo, porque es él quien ha creado el Cálculo y tanto L'Höpital como los Bernoulli no hacen otra cosa que desarrollar las ideas que él ha tenido.

En esta y en dos cartas sucesivas no sólo anima a la edición sino que trata de influir, de alguna manera, en su contenido. Pide que vaya más allá de lo prometido y que incluya tanto el método de diferencias como el de sumas porque, al igual que $x^{-1} = \frac{1}{x}$, se tiene $d^{-1}x = \int dx$, es decir, insiste en que la diferenciación y la integración son recíprocas entre sí. Lo que pide Leibniz, realmente, es que el libro sea la exposición lo mas completa posible del Análisis de los Trascendentes, del Cálculo diferencial e integral. Incluso sugiere que agregue aplicaciones del nuevo método a cuestiones de Física.

Tres cartas que son, auténticamente, tres ensayos sobre el tema con el agregado de unos apéndices o adenda –uno de los estilos preferidos para Leibniz-: en uno relata cómo llegó a inventar el Cálculo; en otro, lo que considera clave de toda su invención, el método inverso de las tangentes como insistiendo a L'Höpital su inclusión en el libro proyectado.

LAS VISIONES QUE LEIBNIZ CUENTA A L'HÖPITAL

Me detengo en el primero de los apéndices de la carta de 27 de Diciembre de 1693, porque en él Leibniz relata la génesis del Cálculo que esbozara en *De Geometría recondita* pero ahora en extenso. Un escrito que Leibniz considera tan importante que en 1714 lo toma como base para su *Historia et Origo Calculi Differentialis,* historia que compone para defenderse de los ataques de plagiario por parte de Newton y su círculo británico. En *Historia y Origen* la narración se hace en tercera persona y no por pretendido efecto literario y además de dar cuenta de cómo creó su cálculo y las diferencias respecto al de fluxiones de Newton, esboza su concepción de la necesidad de la historia.

> «Es utilísimo que los verdaderos orígenes de memorables invenciones sean conocidos, especialmente de aquellas que fueron concebidas no por accidente sino por esfuerzo de meditación. Su empleo no es simplemente que la historia pueda dar a cada uno lo debido y otros sean estimulados por la expectativa de tal elogio, sino también que el arte de descubrir pueda ser promovido y su método llegue a ser conocido a través de brillantes ejemplos.
>
> Una de las invenciones más nobles de nuestro tiempo ha sido un nuevo tipo de Análisis matemático, conocido como Cálculo diferencial; pero mientras su sustancia ha sido adecuadamente expuesta, su fuente y motivación original no se han hecho públicos. Hace al menos cuarenta años lo inventó su Autor [...] (MS V, 392-3)»

Leibniz, en la relación histórico-genética que envía a L'Höpital, comienza reconociendo que a su llegada a París, 1672, le era desconocida toda la Matemática de la época. Sólo, y de pasada, los indivisibles de Cavalieri –de pasada porque, aunque aquí no lo dice, ese conocimiento lo había obtenido a través de la obra de Hobbes–, el *Ductus* de St. Vincent y la *Synopsis Geometrica* de Fabri. Muy poco bagaje, ciertamente. Pero aparece la figura de Huygens. Huygens, «quien pensaba que yo era mejor geómetra de lo que era» según escribe a Tschirnhaus en 1680, le ayuda, orienta, dirige sus lecturas, corrige errores, plantea cuestiones... Huyghens le da a leer su *Horologium Oscillatorium* editado en 1673 y hace que estudie, entre otras obras, las *Cartas de Dettonville* de 1658, lanzadas en reto a los matemáticos del mundo por Pascal cuatro años antes de su muerte (1662), un reto al que, entre otros, acudió Huygens.

En el estudio de estas Cartas aprende el método de indivisibles, del centro de gravedad pero lo más importante: se produce una *primera visión o iluminación*: en el *Traite des sinus du quart de cercle*, Pascal calcula el área de la superficie esférica y lo hace mediante la suma de los productos de los senos por las diferenciales o arcos infinitesimales de la circunferencia. Leibniz no puede reprimir la exclamación:

> Encontré una luz que el autor no había visto (MS II, 259)

Luz que consiste en trascender el *triángulo característico* pascaliano y verlo con una potencia inventiva que va más allá de esta aplicación concreta. Comenta que al comunicar su visión a Huyghens este queda sorprendido porque en el fondo ese es el método que le ha permitido hallar la superficie del conoide parabólico. Otro caso particular más el de Huygens, con empleo implícito de un proceso general, que refuerza la visión leibniziana.

Con el uso del triángulo característico

> «encontré como en un pestañeo casi todos los teoremas que después encontré en Gregory y Barrow sobre esta materia. (MS II, 259)»

En su posterior *Historia et Origo* matiza estilísticamente:

> «Un ejemplo de Dettonville le aporta una luz repentina, a la cual, cosa asombrosa, Pascal mismo no había sido sensible. (MS V, 399)»

(Adenda 1)

Primera iluminación que va seguida de un trabajo dirigido, una vez más, por Huygens. Como honestamente reconoce Leibniz en esta carta a L'Höpital

> «Hasta entonces yo no estaba todavía versado en el cálculo de Descartes y no me servía aún de ecuaciones para explicar la naturaleza de las líneas curvas, pero sobre lo que Huygens me dijo, me puse a ello y no me arrepiento, porque me dio el medio de encontrar pronto mi cálculo diferencial. (MS II, 259)»

Hasta que comienza su estudio serio de la Geometría dirigido por Huygens, y como juego, Leibniz se había centrado en el manejo de las series por influjo de los matemáticos ingleses a quienes había conocido tras su estancia en Londres de 1673. Juego de sumas y de diferencias sobre las sucesiones y que ratifican lo entrevisto y aceptado en Hobbes, lo que va ser una de las pasiones núcleo de su convicción combinatoria.

No sólo juego: las sucesiones que decrecen al infinito tienen como propiedad que su primer término es igual a la suma de sus diferencias. Teorema que, *segunda iluminación* con la confirmación de la importancia de la suma y de la diferencia, le conduce a construir el *triángulo armónico*, triángulo opuesto al triángulo aritmético de Pascal. Si en este se van obteniendo las sucesiones de cada fila como sumas y sumas de sumas, etc., de los elementos de las filas anteriores, en el triángulo armónico las sucesiones de cada fila se obtienen de diferencias, diferencias de diferencias, etc., de los elementos de las filas anteriores y donde la suma de cada fila, con infinitos sumandos, es el primer elemento, término finito, de la fila anterior. (Adenda 2)

Segunda iluminación que le lleva a ver, y ahora desde el conocimiento del álgebra cartesiana, donde "las ordenadas de la curva se expresan por un carácter numérico", que encontrar las sumas o cuadraturas –las integrales- de las ordenadas es lo mismo que hallar la ordenada cuya diferencial es proporcional a la ordenada dada. Segunda iluminación que constituye una sorprendente analogía, totalmente imprevisible, entre el juego aritmético de las series numéricas –con sus sumas y diferencias asociadas– y la representación algebraico-geométrica cartesiana de las curvas. Dos iluminaciones que, unidas, le conducen a la afirmación

> «Reconocí muy pronto que encontrar las tangentes no es otra cosa que diferenciar (hallar diferencias) y encontrar las cuadraturas no es otra cosa que sumar, siempre que se supongan las diferencias incomparablemente pequeñas. (MS II, 260)»

Dos iluminaciones o visiones que se centrarán en el triángulo característico porque el mismo puede considerarse ligado a cualquier curva y no sólo a la circunferencia y gracias a él se pueden reducir las áreas descritas por la rotación de la curva alrededor de un eje a cuadraturas planas –lo realizado por Pascal–, pero también a la rectificación de esas curvas mediante cuadraturas y a enlazar ambos procesos mediante el método inverso de tangentes que consiste en que hallar el área de una curva con ordenada z es lo mismo que hallar una curva cuya tangente satisfaga la condición $\frac{dx}{dy} = z$ (Adenda 1)

En la relación que comento, y antes de terminar su historia de la génesis de la invención del Cálculo, Leibniz vuelve a reconocer la deuda con Huygens, y también con Newton aunque en este caso únicamente en cuanto al manejo de las series.

Pero lo que importa es la historia de las iluminaciones, en la cual falta una tercera: la que conduce al *método de transmutación o metamorfosis* por el cual transforma las cuadraturas irracionales en racionales, y que se encuentra en la base del método inverso de tangentes. En el fondo, este método no es más que una aplicación del triángulo característico pero supone, como en las iluminaciones anteriores, un salto o ruptura epistemológica con todo lo anterior o, con sus palabras, un cambio de punto de vista. En este caso, las áreas se toman como sumas de los triángulos característicos a partir del origen en lugar de tomarlas como sumas de rectángulos sobre el eje de abscisas.

Visiones con las cuales alternan, aunque Leibniz en ningún caso lo explicite y mantenga lo de encontrar de golpe, por un pestañeo, fases de trabajo sobre el cálculo geométrico tanto de Pascal como de Descartes, la lectura de Euclides..., pero también de intentos fallidos. Fases de trabajo muy intensas, que van quedando en los borradores que permanecerán inéditos hasta los trabajos de Gerhardt, entrado ya el s. XIX, entre 1849 y 1864, y posteriormente de Couturat, ya en los inicios del s. XX.

Una de esas fases de intenso trabajo, de vueltas sobre los cálculos, sobre las notaciones, es la que se produce entre los años 1675 y 1676, todavía en París. Leibniz ha quedado cesante en el Electorado de Maguncia y dedica su tiempo, ahora sí, a la matemática además de a obtener créditos e intentar que lo nombren miembro de la Academia de Ciencias de París con lo que resolvería su futuro, en todos los sentidos. Es el momento en el cual aparece, por primera vez de manera explícita, el término *Característica universal*. Trabajo intenso que no explicita en sus relaciones histórico-genéticas, que parece querer ocultar pero que es el que le lleva, junto a sus visiones explícitas, a la creación del Cálculo diferencial e Integral y, lo que desde mi punto de vista es más fundamental, al planteamiento y resolución de las ecuaciones diferenciales. Dos años que vienen a ser la fecha a la que hace referencia en su *Historia y Origen*.

Antes de seguir debo señalar que Leibniz, en esta misiva a L'Hopital, y tras los reconocimientos que indiqué, señala lo que considera, realmente, como lo más importante de su invención. Más que el cálculo diferencial en sí, lo que importa es la inversa de ese cálculo, es decir, el método para

> «encontrar una fórmula o ecuación absoluta, de la que se podrá obtener una diferencial propuesta o encontrar una ordenada cuya diferencia está dada. (MS II, 260)»

En esta línea Leibniz asegura haber encontrado fórmulas generales que después ha empleado Tschirnhaus para las cuadraturas ordinarias. Y reconoce que es aquí donde Craig se había equivocado –acusación indirecta al mismo Newton– y lamenta que los hermanos Bernoulli parecen despreciar esas fórmulas para las inversas de las tangentes.

Al Apéndice anterior agrega otro redactado también para L'Hopital, como deseando que lo incluya en su libro, sobre el método inverso de las tangentes, que es para el cual trata de buscar fórmulas generales, cuadros como las tablas de logaritmos, plasmación de métodos para lo que ha pedido colaboración. Si el planteamiento de la ecuación diferencial es sustancial, la clave es la inversa: la integración de esta ecuación diferencial, y para la sumación no hay reglas mecánicas...

Para Leibniz el Cálculo es un instrumento parcial dentro del sueño de hallar una Característica universal, que sirve para la expresión de ecuaciones diferenciales y, desde ellas, por cuadraturas a través del método inverso de tangentes, alcanzar la expresión asociada de la curva correspondiente. Por ello, en el resumen que envía a Oldemburg y ante la primera respuesta del círculo de Newton –del mismo Newton, realmente–, Leibniz cree entender que, para Newton, el método inverso de las tangentes parece tener una potencia menor que el de sus series infinitas; algo con lo que se muestra en total desacuerdo.

En el fondo, y junto al papel esencial que atribuye a la ecuación diferencial, lo que subyace a esta clave es la noción general de curva, noción que Leibniz trata de generalizar no quedándose en las curvas mecánicas o racionales, insistiendo en que su método es válido para curvas cualesquiera, absolutamente generales –racionales, irracionales y, sobre todo, trascendentes–. De curva particular como la ruleta, la curva logarítmica... a función de la cual esa curva no sea más que una representación gráfica.

Ni el Cálculo diferencial ni el método de cuadraturas son nada si no se alcanza la noción básica de *función*. Es la generalización clave, la noción a la que oscuramente llegará Leibniz, quien utiliza por vez primera este término, *función* en 1692 –MS V, 266 ss.– para una curva con sus constantes y variables siendo la «función de x» una cantidad que depende de la variable x. Es lo que permite hablar de curvas como $y = x^z$ donde z se considera como «magnitud explicable por medio de las indeterminadas x, y» y puede ser liberada de su exponencialidad mediante el paso a logaritmos, con lo cual se tiene

$\lg y = z \lg x$ y se puede aplicar el Cálculo sabiendo que $\lg x = \int \frac{dx}{x}$, por lo cual la expresión anterior queda como $z\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ y se pasa a diferenciar, con lo cual se llega a obtener la tangente de la curva, etc. Nuevamente, los Bernoulli seguirán la línea, adoptarán el nombre, darán la notación o carácter correspondiente.

Hallar tangentes a curvas determinadas, lo habían hecho Fermat, Roberval, Descartes entre otros; cuadraturas particulares, desde Pascal hasta Huygens y prácticamente todos los matemáticos de la época como Barrow, Gregory, Wallis... La potencia iluminadora de Leibniz es haber visto que esos casos eran, todos, particulares que cada uno exigía métodos geométricos concretos de gran ingenio, ciertamente, pero que se quedaban en ese ingenio y en la solución concreta al problema particular planteado. Sus iluminaciones -y lo que oculta, su trabajo- le llevan a la necesidad de generalizar, de alcanzar un método único universal, válido para todos los casos particulares. Generalización que, a pesar de que se seguía aferrado a la gráfica de la curva particular dada, entrañaba la noción esencial, la noción que está en la sombra y que sólo emerge lentamente, sombra que irá abandonando su lugar, dejando paso al personaje central de toda la obra: la noción de función, las de variable independiente y variable dependiente.

Y SU RESULTADO: EL CÁLCULO DE DIFERENCIAS Y SUMAS

3. El resultado de las iluminaciones que le cuenta Leibniz a L'Höpital, aunque no de sus fases de trabajo, es lo que da a luz pública en 1684 en un ensayo, corto ensayo lleno de errores, publicado en Octubre en *Acta Eruditorum*. Con un estilo calificado, al menos, como abrupto, sin explicaciones de tipo alguno, ese ensayo expone lo que califica, desde el título, como un nuevo método, un singular género de cálculo para determinar los máximos, mínimos, puntos de inflexión, tangentes de cualquier tipo de curva dada... Es el ensayo fundacional del Cálculo que lleva por título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.*

A partir de este ensayo fundacional se plantean muchas cuestiones o aspectos que van más allá del mismo. En primerísimo lugar, y base para las restantes, las Matemáticas.

a. Si se centra uno en el ensayo original de Leibniz, lo que éste muestra al público y no lo que oculta en sus borradores inéditos, se observa que la primera parte del mismo establece, sin más, las notaciones a utilizar. Comienza:

> «Sea un eje AX (Fig. 1) y varias curvas como VV, WW, YY, ZZ, cuyas ordenadas, normales al eje, VX, WX, YX, ZX, se llaman respectivamente "v", "w", "y", "z"; y la abscisa AX del eje se llama "x". Las tangentes... Ahora cualquier recta añadida arbitrariamente se llama "dx", y la recta que es a "dx" como "v" es a VB [...] es llamada "dv" [...] o diferencia de las v [...]. Aceptado esto, las reglas del cálculo serán las siguientes:
> Si a es una cantidad constante dada, será da=0 y d(ax)=adx. Si y=v (o una ordenada cualquiera de la curva YY, es igual a cualquier ordenada correspondiente de la curva VV) será dy=dv.»

Aquí dx aparece como «una recta», un segmento, sin indicación de tamaño y se admite como magnitud constante. Respecto a esa constante se define dv como la razón dv/dx que es la pendiente de la línea tangente correspondiente. Se formulan las reglas mecánicas de diferenciar sumas y diferencias, multiplicación y división, sin explicación alguna.

A continuación aparece el párrafo en el que se dan las reglas correctas de los *Signos* y que hoy calificaríamos de estudio de una curva dada en forma explícita. Se dice que dv es positivo cuando la ordenada crece al crecer x, negativo cuando esa ordenada decrece. Cuando no se da ninguno de estos dos casos, cuando v ni crece ni decrece, es decir cuando es estacionario, aparece un máximo o un mínimo: puntos en los cuales la primera diferencia es cero aunque no la segunda y geométricamente corresponde a una línea horizontal, mientras que un punto de inflexión es aquél en el cual la segunda diferencia se hace cero; punto de inflexión porque, en él, cambia la concavidad de la curva. Después se dan las reglas de las potencias y de las raíces, también sin explicación alguna. Leibniz, inmediato, asegura

> «Del conocimiento de este *Algoritmo*, así lo llamo, o de este cálculo, que llamo *diferencial*, pueden obtenerse todas las otras ecuaciones diferenciales por medio del álgebra común (AI, 8).»

E indica que su método se extiende a las líneas trascendentes, sin suposiciones de tipo alguno. Por último, para obtener la tangente de dichas líneas basta

> «trazar la recta que una dos puntos de la curva que estén a una distancia infinitamente pequeña o el lado prolongado de un polígono de infinitos ángulos, que para nosotros equivale a la *curva*. Esa distancia infinitamente pequeña siempre puede ser expresada por alguna diferencial conocida, como "dv", o por una relación con la misma, esto es, a través de alguna tangente conocida (AI, 9).»

Aquí introduce lo que considera una idea básica: al no ser la curva más que una poligonal de infinitos lados infinitesimales, la tangente ya no es la recta que toca a la curva en un único punto, sino que es la recta que prolonga un lado infinitesimal de dicha curva, por lo cual, como escribe a Varignon, ya en 1702,

> «Se entiende por Tangente una línea que corta a la curva en dos puntos coincidentes, como se hace en nuestro cálculo (.) y nuestro cálculo poniendo la esencia de la tangente en la duplicidad de los puntos coincidentes [...] (MS IV, 108)»

Noción básica porque, como dirá posteriormente, los máximos y mínimos son términos relativos a los ejes y de ninguna manera esenciales o intrínsecos a la curva, lo que no ocurre con las tangentes o los puntos de inflexión. No tener en cuenta esta característica de la tangente puede conducir al error cuando se pretende su obtención mediante el nuevo cálculo como ocurre con Rolle que comete errores al hallar la tangente de curvas especiales y llega a introducir nociones como la de tangente relativa, noción carente de sentido.

El texto se acompaña de varios ejemplos pero, y a pesar de lo indicado en el título, ninguno en el que se calcule el máximo, mínimo, tangente o punto de inflexión de una curva determinada. Lo que parece importar es el manejo “ciego” de un algoritmo con unas entidades que llama diferencias. Subyace aquí, desde mi punto de vista, la ausencia del personaje central de este cálculo, la ausencia de la noción de función a pesar de la pretendida generalidad del nuevo cálculo, de su aplicabilidad a todo tipo de curvas.

Que lo que importa es el algoritmo se comprueba en el primero de los ejemplos donde Leibniz muestra una capacidad antipedagógica total, ya que es “bastante complicado para que el modo de usar estas reglas sea evidente en un cálculo algo difícil” como dirá el mismo Leibniz. (AI,11)

El segundo ejemplo constituye una aplicación modelo de los ejercicios de máximos y mínimos pero en lo que pudiera calificarse de cálculo variacional: se pide la línea de longitud mínima entre dos puntos. El ejemplo que pone Leibniz es: Dados dos puntos C y E en un plano separados por una línea recta SS hallar un punto F sobre SS tal que unidos CF y FE la suma de los rectángulos CF por una cantidad h dada y los rectángulos FE por otra cantidad dada r sea la mínima posible. Observando la figura de lo que se trata es de que w sea mínima, siendo w la igualdad

$$w = CFh + EFr = h\sqrt{(p-x)^2} + c^2 + r\sqrt{x^2} + e^2$$

Donde e es la ordenada EQ, c la ordenada CP respecto a la recta SS, x es la distancia QF y p-x la distancia FP. Como se trata de encontrar un mínimo, dw tiene que ser cero. Derivando y aplicando esta condición se obtiene

$$\frac{h(p-x)}{\sqrt{(p-x)^2}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2}} + e^2$$

Leibniz aplica este resultado a la Dióptrica con lo cual el problema se particulariza y se trata de hallar la ley de refracción de un rayo de luz que pasa de un medio de densidad r a uno de densidad h, teniendo presente que "esta densidad no ha de ser comprendida respecto a nosotros sino respecto a la resistencia que hagan los rayos a la luz" (AI, 13). En estas condiciones h representa la densidad del medio de la parte del punto C, r la del medio de la parte E y además, CF y EF se hacen iguales. Operando se obtiene que el seno de los ángulos de incidencia y refracción FP y QF serán recíprocos a r y h, es decir

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{h}{r}$$

Con este ejemplo Leibniz obtiene la demostración por el cálculo de un problema al que él mismo se había ligado anteriormente. Y del cual agrega

> «Lo que otros doctísimos varones han investigado con muchas dificultades, el conocedor de este Cálculo lo ha obtenido en tres líneas. (id., 13)»

Culmina el ensayo con una solución al problema de De Beaune del cual, de modo incorrecto, afirma que Descartes no resolvió:

> «Hallar una curva WW caracterizada porque al cortar su tangente WC con el eje, sea XC un segmento constante.»

En otras palabras: hallar la ordenada w de una curva cuya subtangente τ es una constante τ=a. Para tal curva lo que se tiene es $\frac{dw}{dx} = \frac{w}{a}$. Se toma una sucesión de valores x con diferencias constantes $dx = b$. Con lo cual $dw = \frac{b}{a}w$. De aquí que la correspondiente sucesión de ordenadas w es proporcional a su sucesión de diferencias que es la propiedad característica de una progresión geométrica y, por ello,

> «Si las x están en progresión aritmética, las w están en progresión geométrica, o si w son números, x serán logaritmos: luego la línea WW es la logarítmica. (AI, 15)»

En este ensayo primigenio nada se dice en cuanto a la naturaleza ni dimensión o tamaño de las diferencias. En los primeros párrafos se habla de dx o dv, pero es al indicar cómo se traza la tangente cuando se dice que la *distancia infinitamente pequeña* puede ser expresada por alguna diferencial conocida. De entrada esas diferencias son meros caracteres con los que elaborar, construir un algoritmo y sólo cuando se trata de encontrar la tangente, y también de modo subrepticio en los ejemplos, se dice que dichas diferencias son magnitudes infinitamente pequeñas. Hasta aquí, todo parece quedar en mero algoritmo combinatorio. Y sólo para las aplicaciones se trata de caracteres que representan o significan *infinitamente pequeños*.

En el fondo la diferencia de dos valores sucesivos de v aparece como la diferencial dv. Se supone que dx es, siempre, diferente de cero y más pequeña que x, lo mismo que su producto o potencia. Para Leibniz, dx es una cantidad fija, no una variable que se aproxime o tienda a cero. No hay asomo de aproximación a, o de tender a. Se puede considerar que lo que se tiene es una sucesión de diferenciales asociadas a la curva sobre el eje de abscisas y análogo con las diferenciales sobre las ordenadas. El estatismo en el enfoque leibniziano es total.

La sucesión de diferenciales -de primer orden- tiene asociada una sucesión de diferenciales de segundo orden $d(dx) = d^2x$; diferencial de segundo orden que es, a su vez, más pequeña que dx. Se puede iterar de la forma $d^n x = d(d^{n-1}x)$ y se admite que $d^n x$ es incomparablemente menor que $d^{n-1}x$. Con la advertencia de que $d^n x$ es del mismo orden de magnitud que la potencia n de la diferencial de primer orden dx, en el sentido de que $d^n x/(dx)^n$ es un número real.

Aunque estas diferenciales de orden superior no aparecen en este primer ensayo, la generalización es inmediata y las reglas para el producto y el cociente siguen siendo válidas. El algoritmo combinatorio puede ser generalizado sin dificultad alguna aunque nada se diga de la naturaleza de los caracteres que entran en juego. Así $d(xdy) = dxdy + dxd^2y$ o también

$$d^2(x^n) = d(dx^n) = d(nd^{n-1}dx) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + nx^{n-1}d^2x$$

Y se puede obtener la llamada “regla de Leibniz” relativa a $d^n(uv)$. Regla que puede expresarse como

$$d^n(uv) = \sum_p^n (d^p u)(d^{n-p}v)$$

El ensayo que sirve de complemento y culminación de la obra creadora de Leibniz, se publica en Junio de 1686 y se quiere como una adenda al *Nova Methodus* aunque posee una riqueza conceptual quizá mayor a pesar de que va dirigido a precisar algunas malas atribuciones como las de Tschirnhaus y erróneas interpretaciones, especialmente las de Craig quien había tenido el mérito de ser, realmente, el único en hacerse eco de *Nova methodus* y el papel de los caracteres. Lleva por título *G.G.L. De Geometría recondita et Anaylisi indivisibilium atque infinitorum*. Aquí, y ya desde el título, se habla no de diferencias sino de análisis de indivisibles y de infinitos, pero tampoco se va más allá.

Se demuestra la existencia de las cuadraturas trascendentes, en concreto la del círculo y de la hipérbola, y ello por reducción al absurdo –si la cuadratura algebraica existiera, el problema de la sección de un ángulo en una razón cualquiera sería de grado determinado, lo que es absurdo-. Pero la existencia de cuadraturas trascendentes no implica que sean indeterminadas, que carezcan de solución porque no se disponga de las ecuaciones apropiadas como quería Descartes. Es el nuevo cálculo el que aporta el medio de obtenerlas por lo cual este Cálculo va más allá del método de obtención de tangentes como podría inferirse de lo indicado en *Nova methodus*. Por ello, y de modo inmediato, da un recorrido por *sus* métodos: el inverso de las tangentes, la regla o método de transmutación por el que puede obtener la cuadratura de una curva de cualquier clase...

En polémica con Craig indica cómo este se equivoca al intentar resolver lo que califica de teorema de Barrow al aplicar mal el nuevo método. Teorema que, en palabras de Leibniz, dice:

> «La suma de los intervalos entre las ordenadas y las perpendiculares de la curva hasta el eje y las dirigidas al eje es igual al semicuadrado de la última ordenada. (AI, 23)»

Y pasa a resolver dicho problema como algo conveniente tanto para Craig como para otros. Leibniz no acude a figura alguna en este caso, con el viejo objetivo de liberar los razonamientos de la visión de las mismas. A pesar de ello, se ve en la figura ajunta (AI, 24) –con la advertencia de que Leibniz toma aquí por ordenada x, por abscisa y–, y a través del triángulo característico, que se tiene $pdy = xdx$. Se convierte esta ecuación diferencial en suma: $\int pdy = \int xdx$ y como $d\left(x^2/2\right) = xdx$ su recíproca es $d(x^2/2) = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$ por lo cual $\int pdy = \frac{1}{2}x^2$ que era lo que se pretendía demostrar.

Si me he detenido en este teorema es porque Leibniz, aquí, hace aparecer por vez primera en la historia el signo ∫ para representar la integral –aunque el término empleado sea el de suma hasta que Bernoulli sugiera el actual en 1690– y por la afirmación explícita de que ∫ y d «son recíprocos».

De inmediato pasa a expresar una línea trascendente y da, también por vez primera, la ecuación explícita de la cicloide en la forma

$$y = \sqrt{2x - x^2 + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}}$$

En cuanto a la naturaleza de dx, y tras el ejemplo del teorema de Barrow, Leibniz mantiene su visión de ser meros caracteres al decir

> Prefiero emplear dx y semejantes, antes que letras en su lugar, porque dx es una cierta modificación de la x, y con su ayuda sucede que, cuando el trabajo se hace con la letra x sola, el cálculo evidentemente procede con sus potencias y diferenciales, y se expresan las relaciones trascendentes entre x y otras. (AI, 25)

Lo cual no aclara nada en absoluto o, más bien, lo oscurece. Lo mismo que al insistir más adelante (p. 27) que en las ecuaciones diferenciales “nadie olvide a la ligera dx”...

También aquí Leibniz prefiere decir brevemente cuáles son sus contribuciones y cuáles cabe atribuir a otros. Y tras citar a Galileo, Cavalieri, Fermat, Descartes, Huygens, Mercator... indica en cuanto a las cuadraturas por series infinitas realizadas también por Newton, que este geómetra de profundísimo ingenio

> Si diera a conocer sus pensamientos, los que entiendo que tiene, nos proporcionaría sin duda nuevos caminos para extraordinarios aumentos y tratados de la ciencia. (AI, 26)

Para agregar, como contraposición y afirmación de su originalidad en este terreno

> Me correspondió a mí, entonces principiante en estos estudios, que desde un único aspecto de una demostración sobre la magnitud de la superficie esférica se me apareciera de repente la gran luz (AI, 26-27)

Y pasa a esbozar, muy en esquema, las visiones o iluminaciones, sin citar aquí a Pascal, en las que se extiende en su correspondencia con L’Höpital.

b. Lo que no aparece en lo publicado y sí en lo oculto, se encuentra en una serie de notas o borradores, inéditos que escribe entre Octubre y Noviembre de 1675 a Noviembre de 1676 y continúa en 1677, ya en Hannover. En estos borradores se encuentra lo que oculta en lo que publica: que la sucesión de las ordenadas es, por analogía, lo mismo que la sucesión ordinaria de los números mientras que las abscisas son las que determinan el orden de la sucesión. Y de tal manera que la diferencia entre dos valores sucesivos de las ordenadas se supone infinitesimal y despreciable con los valores de dichas ordenadas, lo que no ocurre con las diferencias numéricas.

Es decir, en lo que oculta, Leibniz explicita la iluminación con las series y la analogía que dicha iluminación le provoca, con las dos operaciones centrales –suma, diferencia- como inversas entre sí con la diferencia de que las diferenciales son magnitudes infinitesimales y, en comparación, más pequeñas que las magnitudes de las que proceden.

Entre esas notas, en la del 29 de Octubre de 1675, representa la diferencia por el signo l y las sumas por omn. Pronto cambia la notación y representa por dx o modificación de x y omn por el signo integral o «la suma de las l». Obtiene el «excelente teorema» que, en notación posterior, se escribe como $\frac{1}{2}y^2 = \int ydy$ –que es el teorema de Barrow– así como los teoremas que califica de «nada obvios»

$$\int xdy = x\int dy - \iint ydx$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

Teoremas de los cuales afirma que son verdad para las series en que las diferencias de los términos llevan a los términos mismos una razón que es menor que cualquier cantidad asignable, en otras palabras, que es un infinitésimo.

El 1l de Noviembre se cuestiona si d(uv) = du.dv y d u/v = du/dv y la respuesta es negativa porque los infinitesimales de orden superior se ignoran al ser infinitésimos respecto a cada factor y lo justifica al considerar que $d(x^2) = d(x+dx)^2 - x^2 = 2xdx$ pero $dx.dx= (x+dx-x)(x+dx-x) = (dx)^2$. Plantea como problema hallar una curva cuya subnormal es inversamente proporcional a su ordenada, es decir $\nu = k/n$ y, a través del triángulo característico y aplicando el operador inverso d obtiene la ecuación buscada.

En Noviembre de 1676 establece las reglas de diferenciación e integración de potencias $dx^n = n.x^{n-1}dx$ y por ser la integración inversa de la diferenciación se llega a $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donde n no tiene por qué ser positivo. Una generalización que le conduce a manejar la regla de la cadena al utilizar el método de sustitución o cambio de variable para la diferenciación de la composición de funciones. Así

$$d\sqrt{a+bz+cz^2} = d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{(b+2cz)dz}{2\sqrt{z+bz+cz^2}}$$

Es el 11 de Julio de 1677, y ya en Hannover, cuando establece, con intento explicativo, las reglas para el producto y el cociente. Para el producto se obtiene

d(xy) = (x+dx)(y+dy)-xy = xdy + ydx + dx dy

y el paso inmediato:

> de la omisión de la cantidad dx.dy, que es infinitamente pequeña en comparación con el resto, porque se supone que dx y dy son infinitamente pequeños, se llega a d(xy)=xdy+ydx

Al establecer la regla para el cociente vuelve a afirmar que xdx puede ser omitido como siendo infinitamente pequeño en comparación con x^2.

Son reglas que Leibniz trata de ver si están de acuerdo con resultados geométricos ya conocidos. Así, la del producto está de acuerdo con la adición de áreas apoyándose en la figura porque se ve que la suma de los términos complementarios da el total $\int xdy + \int ydx = xy$.

En esos borradores, inéditos hasta la publicación por parte de Couturat, aparecen muchos más resultados. Se mantiene que una curva es un polígono con infinitos lados y ángulos "infinitesimales" por lo cual el elemento de arco es el lado de un polígono con infinitos lados, es decir, la recta infinitesimal que une dos vértices consecutivos de donde la diferencial de arco de cualquier curva vendrá dado por la expresión

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

es decir $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

No voy a seguir con el contenido de unos borradores que Leibniz nunca publicó. Únicamente quería señalar cómo en lo que oculta se contienen intentos explicativos que no aparecen en lo que edita y, lo que es más importante, cómo las diferenciales aparecen como magnitudes infinitesimales, magnitudes que realmente constituyen la motivación última para la creación del cálculo diferencial. Con la precisión de que el gran problema es la naturaleza de los mismos, su auténtico estatuto ontológico. Diferenciales o infinitesimales de órdenes diferentes por lo que no pueden compararse entre sí y que parecen encerrar un infinito del cual pretenderá elaborar una Ciencia –la Ciencia del infinito-. Idea que parece venir corroborada por la afirmación mantenida en la carta a L'Hopital de que el infinito se encuentra en la naturaleza, aunque ese infinito no es, para Leibniz, una magnitud numérica, no es un número porque su ámbito es el cualitativo no el cuantitativo.

En cualquier caso, al construir el nuevo método, sea algoritmo, cálculo diferencial o Análisis de los infinitamente pequeños, Leibniz establece la clara visión de que la derivación y la integración son operaciones inversas a la vez que la convicción de que sus notaciones o caracteres son los más adecuados para permitir expresar lo que antes sólo podía hacerse mediante el manejo de figuras geométricas como escribió a Huyghens. El nuevo modo de hacer posibilita expresar y manejar nociones como elemento de curva, elemento de superficie... sin necesidad de recurrir a la imaginería geométrica.

Cuestiones a las que vuelve en su *Historia y origen del Cálculo Infinitesimal*, en 1714, narración en tercera persona, y donde desvela algo de lo que había quedado oculto en sus publicaciones:

> «Si nuestro adversario hubiera conocido esa relación, no hubiera utilizado puntos para indicar las diferencias de órdenes diversos, pues los puntos no son apropiados para la designación del grado general de una diferencia, sino que habría conservado la notación 'd' que había impuesto nuestro joven hombre o una notación similar, pues así, 'd^e' puede expresar una diferencia de grado indeterminado.
>
> A partir de entonces todo lo que antaño venía dado en las figuras puede ser expresado mediante el cálculo. En efecto, $\sqrt{(dxdx + dydy)}$ expresa un elemento de curva, ydx una porción de área; por ser ∫ydx e ∫xdy complementarios, resulta de inmediato que, evidentemente, d(xy) = xdy+ydx, o sea, si se prefiere
>
> $$xy = \int xdy + \int ydx,$$
>
> aun cuando esas figuras varíen a veces, y del hecho de que
>
> $$xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$$
>
> se pone en evidencia que tres sólidos son complementarios unos en relación a otros. (MS V, 408)»

El Cálculo diferencial o Análisis de los infinitos, mera ejemplificación o materialización de la Característica universal, que es, «por así decirlo, una gran parte del acto de inventar»...

SU PLASMACIÓN DIVULGATIVA

Quedarse en los caracteres, en el puro algoritmo sin más explicaciones, no favorece, ciertamente, la difusión y aceptación del mismo. He comenzado haciendo referencia a la publicación en 1696 del libro *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las* *líneas curvas* que aparece como libro anónimo; sólo desde la segunda edición, en 1715, se incorpora el nombre del autor el Marqués de L'Höpital, que ya se mantiene en las posteriores de 1720, 1768, 1781. Es libro que se publica doce años después de aparecer el primer ensayo sobre una nueva disciplina, el Análisis infinitesimal y se convierte en una de las claves para la difusión del nuevo método leibniziano. Hasta esa publicación, sólo Leibniz, los hermanos Jacques y Jean Bernoulli, el marqués de L'Höpital y Varignon hacen uso correcto del mismo, con la precisión de que éste sólo lo hace del cálculo diferencial y no del integral en los primeros momentos. Uso de un grupo, realmente, de *iniciados* en un cálculo que, como diría Fontenelle en el elogio fúnebre a Leibniz en la Academia de Ciencias de París el 13 de Noviembre de 1717 un año después de su muerte

> «no era más que una especie de misterio y, por así decirlo, una ciencia cabalística hermetizada entre cinco o seis personas. (*Análisis*, 8)»

Ciencia cabalística que manejan cinco o seis personas pero que, realmente, viene avalada en su oscuridad por esas mismas personas que parecen querer ocultar los métodos inventivos que manejan. Es lo que se hace patente en *Nova Methodus*, pero también en los sucesivos ensayos sobre el Cálculo.

Por otro lado ni siquiera Huygens se ha tomado la molestia de profundizar en el estudio y manejo del nuevo método que, además, se le muestra un tanto artificial y poco útil. Incluso en carta a Leibniz de Mayo de 1691, y ante unos problemas de subtangentes y otros que Huygens resuelve por el procedimiento geométrico clásico, al haberle escrito Leibniz que los puede resolver más fácilmente por su cálculo diferencial, y ante las dificultades que Huygens tiene con el mismo, responde:

> «Os agradezco ser claro en lo que nos deis, y no suponer que entendemos vuestro *calculus differentialis*. (MS II, 93)»

No sólo que se entienda sino que, nueva insistencia, sirva para algo. Un servir para algo que no se limite a problemas geométricos que para Huygens se muestran como problemas *ad hoc*, excesivamente concretos. Cuestiones como la ecuación de la cicloide, la braquistócrona, la catenaria, las cáusticas..., por interesantes que sean –y Huygens acude a resolverlas-, no se le presentan como suficientemente atractivas como para dedicar un tiempo a dominar ese nuevo cálculo de infinitesimales o diferenciales, cálculo del que no se han explicitado, claramente, sus reglas operatorias ni se indica con claridad qué son esas diferenciales o esos infinitamente pequeños. Sólo por presión de L'Höpital, hacia fines de

1693, le comenta a Leibniz que ha hecho algún progreso en las sutilidades geométricas y en «vuestro excelente cálculo diferencial, del que aprecio cada vez más la utilidad», pero honestamente agrega que sigue sin entender nada de los ddx...

Es esa clarificación lo que pretende, precisamente, el marqués de L'Höpital al publicar su obra. No sólo clarificación sino ruptura con el *misterio* que rodea al Cálculo. Frente a los errores que aparecen en los ensayos de Leibniz, frente a las oscuridades en los mismos que conducen a mantener que son más un enigma que una explicación, L'Höpital trata de ofrecer todo lo contrario: una especie de manual casi escolar. Manual que, aprendido, no lleve a errores y falsas imputaciones como ocurre con el ya citado Craig quien en su libro *Método para determinar la cuadratura de las curvas*, de 1685, cita a Leibniz pero señalando que su método de indivisibles –que utiliza y lo utiliza mal– deriva directamente de los matemáticos ingleses como Barrow y Wallis aunque Leibniz no tiene la honestidad de decirlo. Errores también en el uso del análisis por parte de Tschirnhaus, después de otros... Conviene la aclaración para seguir la petición de Leibniz: no prostituir los métodos utilizándolos erróneamente.

L'Höpital pretende la difusión pero, a la vez, la aclaración de las oscuridades que entornan el nuevo método. En la *Introducción* señala que se limita a dar

> «nada más que la primera parte del cálculo del Sr. Leibniz, la cual consiste en descender de las magnitudes enteras a sus diferencias infinitamente pequeñas, y en comparar entre sí estos infinitamente pequeños de cualquier género que sean; esto es lo que se llama *cálculo diferencial*. (*Análisis*, 20)»

Honestamente, L'Höpital mantiene lo que indicara en su carta a Leibniz de 1694 cuando le dio la noticia de los cuadernos y la insistencia de Malebranche para su edición pero sin agregar las sugerencias recibidas aunque, en el *Prefacio*, lamenta no haber agregado una sección más para hacer sentir la prodigiosa utilización del Cálculo en la física, especialmente en la mecánica. Justifica, curiosamente, esta ausencia de aplicaciones en "una enfermedad me lo impidió". En cualquier caso es el futuro libro de Leibniz el que debe contener el cálculo de sumas –se sigue sin emplear el término integral–

> «y que consiste en retornar a partir de esos infinitamente pequeños a las magnitudes o los totales de los cuales ellos son las diferencias, es decir, en encontrar las sumas. (id.)»

Y no se tocan estos temas porque, según L'Höpital, Leibniz le ha indicado que trabaja en un tratado que titula *De Scientia infinitii* y que contendrá

> «todo lo que hay de curioso para el método inverso de las tangentes, para las rectificaciones de curvas, para la cuadratura de los espacios que comprenden, para lo de las superficies de

> los cuerpos que describen, para la dimensión de estos cuerpos, para el descubrimiento de los centros de gravedad [...] (*Análisis*, 21)»

Se puede considerar que L'Höpital se limita a ampliar y desarrollar lo contenido en el oscuro trabajo fundacional *Nova Methodus*. En el fondo, es lo que cumple, y puede afirmarse que bastante bien. La obra se divide en diez secciones. En la primera se dan las definiciones y reglas del cálculo de diferencias; las tres siguientes, el uso de este cálculo para hallar tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión de cualquier tipo de línea curva. Las seis restantes se dedican a resolver aplicaciones del Cálculo para encontrar evolutas, cáusticas y otras cuestiones. El libro, realmente, constituye una colección de problemas, todos resueltos. He indicado que en la Sección I se presentan los conceptos clave. La Definición I establece:

> Se llaman cantidades *variables* aquellas que aumentan o disminuyen continuamente (id. 27)

Mientras que la Definición II dice:

> «La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la *Diferencia*. (id. 28)»

Con ello L'Höpital parece romper con el carácter estático establecido por Leibniz para las diferenciales: aquí hay, ya, magnitudes "variables" y, por ello, pueden aumentar o decrecer. Y realiza, igualmente, una Advertencia:

> En lo que sigue se hará uso de la notación o signo d para denotar la diferencia. (id.)

El signo d puede interpretarse como un operador que actúa sobre las cantidades variables, manteniendo el espíritu de Leibniz en este aspecto. Siguen dos Postulados. En el Primero

> «Se pide que se puedan tomar indistintamente una por la otra dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña.»

Mientras que en el segundo

> «Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña.»

A partir de aquí, las reglas operatorias con aplicaciones a distintos problemas. En la Sección IV dedicada al *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno* se incluye la definición de diferencial de orden superior:

> «La porción infinitamente pequeña en la que aumenta o disminuye continuamente la diferencia de una cantidad variable es llamada la *diferencia de la diferencia* de esta cantidad o bien su segunda *diferencia*. (*Análisis*, 115)»

Se reitera y se habla de la diferencia de la segunda diferencia o tercera diferencia, y así sucesivamente. L'Höpital se apoya en una figura para dar una imagen de estas diferencias de orden superior, pero ello implica, realmente, más oscuridad que claridad. La misma figura le permite establecer la Observación, parágrafo 63, de que hay diferentes órdenes de infinitamente pequeños (p. 117) y de tal manera que un infinitamente pequeño lo es en relación con un espacio determinado –del cual representa, en realidad, su segunda diferencial– mientras que es infinitamente grande respecto a otro dado previamente –y que no es otro que su diferencial correspondiente-. En esta Sección se formulan problemas para determinar la diferencial de cantidades compuestas de diferenciales cualesquiera y se llega a establecer

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$dd(xy) = xdy + 2dxdy$$

Pero también dd(xy)= ydx + 2dxdy. Subyace la no distinción entre variable independiente y variable dependiente. L'Höpital justifica esa posibilidad con la afirmación

> «Se tomará como constante a la diferencia que se quiera y, tratando a las otras como cantidades variables, se hará uso de las reglas prescritas en la Primera Sección. (p. 121)»

Sólo dos puntos, aquí. El primero, la aceptación por parte de L'Höpital, de manera implícita, de la existencia tanto de cantidades infinitamente pequeñas, como de la existencia de diferentes órdenes de infinitud pero sin entrar en disputas de tipo alguno. Aceptación existencial implícita que conlleva dos caras: la de negar tal existencia y con ello negar validez al nuevo método; la de tratar de construir toda una metafísica de infinitos tanto en lo grande como en lo pequeño. Esto último es lo que intentará Fontenelle. En cualquier caso, punto de polémica, de controversia que se reabre a partir de la publicación de este libro, que sirve de referencia para las mismas.

Aunque ya antes, ciertamente, el grupo de iniciados en el nuevo método tiene sus contradictores. Bernard Nieuwentijt en 1695 publica *Analysis Infinitorum* donde critica duramente a Leibniz, los dos Bernoulli y L'Höpital por emplear razonamientos fundados en el Cálculo de diferencias sin haber demostrado los principios. Ataques que conducen a Leibniz, en carta de 24 de Junio de 1695 y tras dar noticia de la crítica de Nieuwentijt y su futura respuesta al mismo, a pedir a L'Höpital que el libro salga pronto, lo antes posible porque entonces "esas discusiones cesarán". Petición seguida de una postdata en la que da noticia de que Huygens está enfermo:

> «Su conservación nos importa infinitamente. (.) Tras Galileo, Kepler y Descartes, es al que se debe nombrar. Es también a él, tras aquellos, a quien yo más debo. (MS II, 288)»

L'Höpital responderá el 3 de Septiembre que sus ocupaciones le llevan a estar fuera de París demasiado tiempo por lo cual no puede seguir la marcha del libro y reconoce:

> «mi libro se imprime muy lentamente [...]

En segundo lugar, no entro, no quiero entrar, en si el libro es la mera transcripción de las lecciones que L'Höpital recibió de Jean Bernoulli. He hecho referencia a la posición de Leibniz en este terreno. Desde 1692 Jean Bernoulli se queja a Huygens, a Leibniz de que los resultados que hace públicos L'Höpital son, realmente, suyos. Huygens no desea entrar en las disputas entre ambos como le escribe a Leibniz y este le llega a contestar respecto a esas exigencias de originalidad por parte de Bernoulli en cuanto a lo que se publica, «La materia de su queja no me parece considerable. También creo que se reconciliarán». Las quejas se centraban en una cuestión acerca del problema de De Beaune que Leibniz considera de poca dificultad... Pero a partir de la edición del libro Jean aumenta el tono y escribe en 1698 a Leibniz que el marqués le había plagiado sus notas de manera descarada.

En 1706, en la Nota que ya he citado y donde da cuenta, frente a Fontenelle, de cómo fue su invención y cómo Jacques Bernoulli y a su través, su hermano Jean, aprenden la misma y no sólo por sus ensayos publicados sino por la información que les da en su correspondencia, señala:

> «Ellos siempre me han hecho la justicia de atribuirme la invención de este Análisis, como se ve en distintos lugares de sus escritos en las Actas de Leipzig y, además, por la Obra del Marqués de L'Höpital, a quien Bernoulli el joven le había comunicado los fundamentos y la materia en París; y yo les he hecho lo mismo, reconociendo que tenían mucha parte en la utilidad que el Público ha obtenido, y que nadie había hecho más que ellos para hacer valer esta invención, con el Marqués de L'Höpital, a quien esta ciencia debe mucho. (MS V, 391-2)»

Y todavía más en cuanto al papel del Marqués de L'Höpital:

> «La obra que el Marqués de L'Höpital publica el primero sobre este nuevo sistema, bajo el título de *Análisis de los infinitamente pequeños*, ha sido publicada con *mi consentimiento*. Tuvo la deferencia para mí y la honestidad de pedirme que si yo quería servirme de mi derecho de Inventor para publicar el primero una obra de una extensión correspondiente sobre esta nueva ciencia, él no podía anticiparse. Pero yo no podía privar al Público de un trabajo tan útil como el suyo, para conservarme un derecho del que podía prescindir fácilmente teniendo siempre el de completarlo, como lo he hecho, proponiendo de vez en cuando algunas nuevas vías para hacer avanzar este Análisis. (MS V, 392, sub. del autor)»

Me limito a señalar, aquí, que en el *Prefacio*, y como acto de justicia respecto a la originalidad del libro, L'Höpital escribe:

> «Por lo demás, reconozco deber mucho a los esclarecimientos de los Sres. Bernoulli, sobre todo a los del joven, que actualmente es Profesor en Groninguen. Me he servido sin cumplidos de sus descubrimientos y de los del Sr. Leibniz. Es por ello que consiento que reivindiquen todo lo que gusten; yo me contento con lo que tengan a bien dejarme. (*Análisis*, 21)»

Es punto en el que, de modo inmediato, L'Höpital va a agregar otro párrafo donde, y también en nombre de una honestidad en cuanto a la originalidad tanto del contenido como del enfoque, se refiere a la obra de Newton. Palabras donde reconoce la diferencia básica de los enfoques y que tiene en la Característica una ventaja esencial por lo cual ha decidido seguir la línea de Leibniz. Son momentos en los cuales Leibniz admite de buena fe que Newton ha obtenido, y con total independencia, algo semejante al Cálculo diferencial. Posición que, tras las acusaciones de plagio lanzadas desde el grupo británico, modificará sustancialmente años después. Las palabras de L'Höpital son:

> «Es también un acto de justicia debido al sabio Sr. *Newton*, y que el mismo Sr. Leibniz ha reconocido (*Journal des Savans*, 30 Agosto 1694): que él también había encontrado algo parecido al cálculo diferencial, como aparece en el excelente libro intitulado *Philosophiae naturalis principia Matematica*, que publicó en 1687, y el cual en casi su totalidad se refiere a este cálculo. Pero la Característica del Sr. Leibniz hace el suyo mucho más fácil y más expedito; además de que es de una seguridad prodigiosa para múltiples usos. (*Análisis*, 21)»

Sea o no totalmente original de L'Höpital, este libro tuvo el mérito de plasmar en texto casi escolar el nuevo método creado por Leibniz y afirmado, en primer lugar, por el trabajo de los Bernoulli. Mérito básico para un tratado de este tipo y que no limita su celebridad a que en él se contenga, por vez primera, lo que hoy se denomina *regla de L'Höpita*" en su parágrafo 163 donde se establece que el valor de una expresión racional en la cual numerador y denominador se vuelven cero en x=a, es el cociente de las diferencias del numerador y del denominador para ese valor x=a. El Ejemplo I del parágrafo 164 es

$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt{a^2x}}{a - \sqrt{ax^3}}$$

que para x=a es $\frac{0}{0}$ pero que, siguiendo la regla, se llega al valor $\frac{16}{9}a$. (*Análisis*, 261).

De hecho, se convierte en libro de referencia tanto para el dato de ciertos valores como para la seguridad en el dominio del nuevo método y, en palabras de Leibniz, para acallar cualquier duda en cuanto a su manejo.

CUESTIONES CONCEPTUALES – PRAGMÁTICAS

Cuando Leibniz estudia, por indicación de Huyghens, la obra geométrico-algebraica de Descartes, de modo inmediato encuentra una limitación en esa obra. En el álgebra geométrica se reducen los problemas a ecuaciones de un grado determinado: recta, ecuación algebraica de primer grado; cónicas, ecuaciones de segundo grado, etc. Pero Leibniz encuentra curvas, líneas que pueden ser construidas o imaginadas y que no se reducen a construcciones con regla y compás, es decir, no son algebraicas. Curvas que Descartes parece eliminar al considerar que no son mecánicas, las únicas que desde su enfoque son manejables algebraicamente. Y lo que ve Leibniz es que con su nuevo método se puede superar esa limitación. Con él cabe estudiar todo tipo de curvas, racionales o irracionales. Problemas que sobrepasan el álgebra ordinaria y que son, por ello, problemas trascendentes en los que se estudian curvas de grado indeterminado o incluso exponenciales. De aquí uno de los nombres que da Leibniz al nuevo cálculo: Análisis de los trascendentes.

Es una visión muy clara: Leibniz se ve creando un hacer matemático diferente al algebraico cartesiano. Pero también al hacer estrictamente geométrico o “método de los antiguos”. En un primer momento un hacer que se limita al aspecto operatorio, a un algoritmo o cálculo de diferencias, en el que lentamente va a surgir la noción de función.

Ahora bien, es un cálculo que también tiene sus limitaciones. En él tampoco se consiguen expresar de modo directo la situación, los ángulos, el movimiento..., es decir nociones directamente ligadas al *situs*, a lo geométrico puro que no trata con los números o la magnitud como hace el Álgebra. En los escritos geométricos de Pascal que ha estudiado, copiado, ordenado y pedido que se publiquen cuando los devuelve en Agosto de 1676 a Etienne Périer –petición de edición en la que insiste en 1692–, ha encontrado la elaboración de una geometría no métrica irreducible en principio al álgebra como es la geometría proyectiva. Pero también copia de Pascal alguno de sus ensayos sobre el espacio homogéneo de tres dimensiones, sobre lo que denominar situs en abstracto. El nuevo cálculo, aquí, se le muestra tan impotente como el cartesiano.

Es lo que le reafirma en otra búsqueda: la de una característica geométrica, de la cual gran parte de los borradores permanece inédita, y que parecerían ir en una línea próxima a la actual Topología. Es búsqueda que justifica sus permanentes afirmaciones a

L'Höpital de haber olvidado su Cálculo, que sus métodos le llegan a ser ajenos... Es lo que justifica las alusiones que he ido haciendo a que el Cálculo diferencial no es, en sí, el tema único ni quizá central en el hacer matemático de Leibniz aunque, de hecho, sea el auténticamente logrado.

Sin embargo, por ir más allá de lo realizado por Descartes, por los antiguos, Leibniz acentúa el valor pragmático del mismo: con el nuevo método se va más allá de lo conocido. A pesar de lo cual se presentan reservas, cabe siempre la pregunta: Para qué sirve, si es que sirve para algo, el nuevo cálculo. Ya he indicado las reticencias del propio Huygens. Por lo pronto, y en su origen, sirve para hallar los puntos notables de las diferentes curvas. De modo inmediato, para plantear y resolver la primera ecuación diferencial, expresar la ecuación de una línea como la cicloide. En competencia con los hermanos Bernoulli, con Huyghens, con el mismo L'Höpital, plantear y resolver cuestiones como obtener curvas como la braquistócrona, la isócrona... iniciando así el Cálculo variacional.

Nuevo método que amplía, ciertamente, el hacer matemático pero que parece resolver cuestiones puramente geométricas, sin ir más allá, a pesar de los ejemplos de la Dióptrica del primer ensayo. De hecho, en los primeros momentos y por parte del grupo de iniciados, el cálculo se queda en este tipo de instrumento. Es lo que dará el contenido del libro de L'Hopital que, tras las definiciones y suposiciones plantea problema tras problema que va resolviendo y en esa resolución van surgiendo los temas pertinentes; pero problemas, siempre, de carácter geométrico apoyados en la gráfica y todavía en la sombra la noción básica de función lo mismo que permanece en la sombra una representación coherente y común en sistema de coordenadas. Sistema de coordenadas que se va plasmando como el polar por Jacques Bernoulli, o los intentos que se reflejan en los nombres de co-ordenadas, ejes de co-ordenadas de Leibniz. Y es la crítica de Huygens.

Aunque los biógrafos han insistido en el papel que la Matemática mixta tiene para Leibniz, no hay aplicaciones serias a problemas de física, no se establece lo que puede denominarse una auténtica física matemática. Leibniz se mantiene, realmente, en esa matemática mixta. Es un terreno que ciertamente inicia uno de los 'iniciados', concretamente Varignon, pero será la obra de los Ilustrados, de los Bernoulli posteriores y, básicamente, de Euler. Un terreno sólo factible al unir el enfoque radicalmente estático leibniziano con el dinámico newtoniano. Pero, ciertamente, aquí se han establecido las bases para la creación de esa Física matemática, inviable sin el Cálculo diferencial e integral. En este sentido considero radicalmente exacta la afirmación del mismo Leibniz cuando en carta de 11 de Octubre de 1693 escribe a Huygens:

> «Todo lo que me había propuesto produciendo el nuevo cálculo, que habéis comenzado a encontrar cómodo, ha sido abrir un camino en el que personas más penetrantes que yo puedan encontrar algo importante. (MS II, 164)»

EL NIVEL ONTOLÓGICO Y EL *GEÓMETRA EXTRAVAGANTE*

Y estamos en uno de los grandes problemas del Cálculo, porque su metodología es clara, Leibniz ha establecido las reglas del cálculo diferencial de manera perfecta y ha insistido en que el gran problema es el recíproco, de la ecuación diferencial pasar a su integración, pero el manejo del nuevo cálculo queda perfectamente nítido desde sus orígenes. Del mismo modo, tampoco hay cuestión epistemológica alguna, con el cálculo se obtienen resultados prácticos, se inventa, porque es el que posibilita conocer los fenómenos ligados a la physis a través del estudio de la ecuación diferencial correspondiente. El problema real es el ontológico, la naturaleza existencial de las diferenciales, de los infinitamente pequeños.

Se ha insistido en que Leibniz fue bastante circunspecto en sus primeros momentos respecto a la naturaleza ontológica de estas magnitudes infinitesimales, momentos en los cuales considera que el cálculo infinitesimal realmente es un *lenguaje* conciso bien adaptado al arte de la invención, del descubrimiento. Como lenguaje, en el fondo, un instrumento para el cálculo de la ecuación de la curva y, con ello, para el conocimiento de las propiedades de la misma. Se ha insistido en el hecho de Leibniz parece ocultar en lo que publica el carácter infinitesimal de las diferenciales y, en un principio, se limita a señalar que, en el fondo, son afecciones de la magnitud x o de la v, que no deben marginarse en el cálculo y que lo que importa es su carácter operatorio. He insistido en este aspecto en las líneas anteriores.

Sin embargo, una de las dificultades para la aceptación del Cálculo se centró, precisamente, en la naturaleza ontológica de las diferenciales. Tratando de bordear esas dificultades Leibniz se apoya en la idea de comparabilidad que desarrolla en Febrero de 1689 en las Actas de Leipzig y donde se asume que dos cantidades son iguales cuando su diferencia es incomparable. Y como recuerda a L’Höpital el 24 de Junio de 1695:

> «Llamo *magnitudes incomparables* cuando una multiplicada por un número finito cualquiera que sea, no excede a la otra (MS II, 288)»

Lo cual no es otra cosa que acudir al principio arquimediano, que no da, ciertamente, mucha luz sobre el tema central. El nuevo método, insiste Leibniz, exige el empleo de diferencias o infinitamente pequeños al manejar las magnitudes en general y no figuras o números por lo cual es un algoritmo

> «propio de magnitudes incomparables, es decir aquellas que son infinitamente grandes o infinitamente pequeñas en comparación con las otras. (MS V, 259)»

Pero esto parece implicar que esas magnitudes no son, en sí, infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, sino sólo en la comparación entre magnitudes. Es lo aceptado casi textualmente por L'Höpital cuando compara diferentes órdenes de infinitésimos en su libro y que he citado anteriormente. Pero la pregunta surge inmediata. Qué criterio "objetivo" existe para aceptar que d^2x es incomparablemente menor que dx, o para que se afirme que dx.dy es incomparablemente menor que dx o que xdx y por ello se hace desaparecer este término para que salga la regla de la diferenciación del producto... La apoyatura de L'Höpital en una figura extraña no ayuda, para nada, a salir de dudas sino, en todo caso, las aumenta como de hecho ocurrió con Huygens, con Rolle que no veían el papel "geométrico" de esas segundas diferenciales, y no digamos de las siguientes.

Una crítica que no realizaron únicamente Rolle o Berkeley en años posteriores, sino que es crítica a la que tuvo que enfrentarse Leibniz al igual que los distintos matemáticos que manejaron los indivisibles. En defensa, y en carta a Grandi, afirma:

> «Concebimos el infinitamente pequeño no como un simple y absoluto cero, sino como un cero relativo (como usted mismo ha remarcado), es decir, como una cantidad evanescente que retiene el carácter de aquello que está desapareciendo. (MS IV, 218)»

Naturalmente, atribuir un carácter evanescente al infinitamente pequeño, a las diferenciales no es muy aclaratorio. Además esas diferenciales encierran, en sí, la posibilidad del error: es lo que aparece al reemplazar la curva por rectángulos infinitesimales diferentes de la curva y, por ello, al sumar los rectángulos se comete un error respecto al área de la curva dada aunque Leibniz, en sus notas inéditas de Julio de 1677 indique que los triángulos "son infinitamente pequeños comparados con los rectángulos dichos; pueden ser omitidos sin riesgo". Una cuestión que se liga, igualmente, en su concepción de línea curva como poligonal compuesta de segmentos rectilíneos infinitesimales. Concepto de error que se salva no ya por la comparabilidad sino porque ese error puede hacerse menor que cualquier valor previamente dado ya que, en palabras que son de actualidad,

> «en lugar del infinito o del infinitamente pequeño, se toman cantidades tan grandes y tan pequeñas como haga falta para que el error sea menor que el error dado (MS IV, 96)»

Sin embargo, no es prudencia o circunspección lo que se revela en las manifestaciones de Leibniz. En 1684 publica *Nova Methodus* y por esas fechas redacta *Discurso de metafísica* que le sirve para su correspondencia con Arnauld para ir más allá del *Discurso del Método* de Descartes. Con nitidez, establece unas barreras entre las distintas disciplinas científicas y la Metafísica. Al discutir las formas sustanciales señala que son esenciales para la Metafísica porque es con ellas con las que se puede alcanzar el conocimiento de los primeros principios y elevar el espíritu al conocimiento de las naturalezas incorpóreas y de las maravillas de Dios. Imprescindibles para la Metafísica, deben desterrarse de las ciencias. Un físico puede dar razón de las experiencias apoyándose en otras experiencias anteriores o más simples o bien en demostraciones matemáticas sin tener que acudir a las formas sustanciales porque ello implicaría que no explica nada:

> «Y si emplea para ello el concurso de Dios o bien algún alma, *arché* u otra cosa de esta índole, es tan extravagante como si en una deliberación práctica importante quisiera entrar en grandes razonamientos sobre la naturaleza del destino y de nuestra libertad. (DM 68)»

Análogo para los geómetras, para los matemáticos:

> «Un geómetra no necesita complicarse la mente con el famoso laberinto del continuo (.) puesto que el geómetra puede concluir todas sus demostraciones (.) sin entrar en esas disputas (DM, 67-68)»

Laberinto del continuo que es objeto específico de la Metafísica porque ese laberinto se centra en la discusión de la continuidad y si es factible admitir en ella indivisibles, laberinto en el cual el tema básico es la consideración del infinito. Para Leibniz parece claro que para el geómetra, para el matemático, basta con el algoritmo, con la característica numérica, trascendente o geométrica. Discutir la naturaleza ontológica de los caracteres con los que se desarrollan esas características, discutir la naturaleza del infinito entrando en el laberinto del continuo, no es asunto del matemático sino del metafísico. De lo contrario, será un *geómetra extravagante*. Lo cual no implica que esa marginación de lo ontológico le impida inventar y desarrollar los cálculos. Para el geómetra basta considerar la comparabilidad o el criterio antes citado de la acotación del error y no hacer depender su trabajo de disputas metafísicas.

Discurso de metafísica permaneció inédito. Y la presión de los que manejan el cálculo, de quienes lo atacan se fue haciendo cada vez mayor. Presión que obliga a Leibniz a difundir su concepción ya que él mismo ha ido variando el nombre de su invención y de algoritmo o cálculo de diferencias pasa a Análisis de los trascendentes y, también, Análisis de los infinitos. Con esta última denominación parece que el Cálculo se liga al terreno metafísico a través del laberinto del continuo; que el Cálculo maneja, de modo efectivo, diferenciales infinitamente pequeños que corresponden al orden de la naturaleza como escribe a L'Höpital. Es la concepción que admiten sus seguidores, el grupo de *iniciados*.

Ligándose a la cuestión de por qué eliminar unas y no otras diferenciales en el cálculo Niewentijt, en 1695, indicará que sólo cabe eliminar en el cálculo lo que es nada, pero no lo que se admite como infinitamente pequeño, porque esa admisión supone que es algo. De aquí el manejo de las segundas diferenciales debe ser rechazado porque, por eliminarse, han de ser nadas. Argumento que a Leibniz le sugiere la reflexión que comunica a L'Höpital y que reitera casi textual en carta paralela a Huygens,

> «Así según él ddx no es una cantidad e incluso el cuadrado de dx no es nada, lo que es divertido de todas formas, porque tiene que admitir que el cuadrado de una cantidad es nada. Pero tiene necesidad de esa paradoja para sostener su postura. (.) La razón no es la que supone (..) sino que esos términos son incomparablemente menores que los que son afectados por ellos (MS II, 293-4)»

En la respuesta directa a Niewentijt Leibniz es más diplomático. Se reafirma en que es correcto considerar cantidades cuyas diferencias son incomparablemente pequeñas para que sean iguales. Con una analogía, una línea no se altera porque se le agregue o quite un punto. Pero reconoce que si fuera cuestión de palabras, podría rechazarse dicha igualdad. Se encuentra abierto sobre cualquier tipo de consideraciones sobre las extensiones infinitas cada vez mayores o cada vez menores porque mantiene la separación entre el hacer operatorio y la discusión metafísica. Aclara que no hace falta recurrir a consideraciones metafísicas como hablar de la composición del continuo para justificar la potencia de un cálculo. La justificación de éste viene dada, casi por modo exclusivo, por su fecundidad y potencia:

> «Desde el momento en que produce necesariamente y con tanto rigor todos los resultados que produciría el otro método (aparentemente) más riguroso, basta que sea inteligible y útil para la invención. (MS V, 322)»

En 1699 comienza un período de gloria para Leibniz. Es cuando consigue realizar un sueño: ser elegido miembro de la renovada Academia de Ciencias de París. L'Höpital le felicita en Febrero de 1699 y la contestación de Leibniz, de Marzo, es de radical agradecimiento tanto al marqués como al Abate Bignon porque reconoce que han sido las gestiones de ambos las que han propiciado la elección y se compromete a proponer algunos temas a la Academia. El diploma que lo acredita como miembro extranjero le fue enviado por el Secretario de la Academia, Fontenelle y lleva fecha de 13 de Marzo de 1700. Como Leibniz recibe por esas fechas la ayuda del matemático Naudé con la elaboración de una serie de tablas de series numéricas en notación binaria, el 4 de Abril de 1701 comunica a L'Höpital que trata de salvar algunos pensamientos ya antiguos que se podrían perder y de aquí el envío a la Academia de un ensayo que contiene una nueva *Aritmética en sistema binario* que será como una *anchora sacra*...

Pero también es año en el que se profundizan tensiones que terminarán en enfrentamiento radical con el círculo matemático británico. L'Höpital comunica, el 13 de Julio de 1699, la edición del tercer tomo de la obra de Wallis, en la que se incluyen algunas cartas, entre ellas dos de Leibniz a Newton:

> «y ello creo en el pensamiento de atribuir a este último la invención de vuestro cálculo diferencial que Newton llama de fluxiones. Me parece que los ingleses buscan a toda costa atribuir la gloria de esta invención a su nación. (MS II, 336)»

Igualmente envía el tratado de Fatio en defensa de Newton. El 7 de Agosto de 1699 responde Leibniz que ha dado su autorización a Wallis para que incluya las cartas porque nada tiene que ocultar. Y respecto al libro de Fatio comenta:

> «Da a mis palabras un sentido que no tienen (.) No creo que Newton apruebe las expresiones de Fatio. Conoce mejor la verdad. (id. 337)»

Es Leibniz quien parece no conocer *la verdad* de lo que se está tramando en los círculos británicos ligados al Colegio invisible, lo que está tejiendo Newton.

En la Academia de Ciencias de París también estalla la polémica en torno a la existencia o no de las cantidades infinitesimales así como de la operabilidad y comparación que pueda hacerse entre ellas. El ataque lo inicia Rolle para quien, en estas fechas, el cálculo no es más que una colección de ingeniosas falacias, un ataque que se basa en gran medida en el libro de L'Höpital, en la definición en él de los órdenes de infinitud, la aceptación de los infinitamente pequeños. Ausente L'Höpital de París, la Academia encarga a Varignon la respuesta a Rolle nombrando tres jueces para dirimir el asunto exigiendo, a la vez, el secreto de las discusiones. Varignon muestra errores en los cálculos de Rolle pero también entra en el tema de la naturaleza de los indivisibles.

Varignon, ante la ausencia de L'Höpital, acude a Leibniz en busca de ayuda en carta de 28 de Noviembre de 1701 con lo cual inicia su correspondencia directa. Informa que hasta los amigos como Gallois se vuelven en contra al considerar que Leibniz se niega a admitir la existencia de los infinitamente pequeños apoyándose en la metáfora que había publicado en *Journal de Trevoux* (en el número de Noviembre-Diciembre) como respuesta *aclaratoria* a unos ataques contra el método cuando en París la Academia había exigido el secreto para las discusiones. Aquí Leibniz había mantenido que no era necesario tomar el infinito en todo rigor sino como cuando se dice en óptica que los rayos del sol proceden de un punto infinitamente alejado y por ello se estiman paralelos. Y en cuanto a la existencia de diferentes grados de infinito o de infinitamente pequeños emplea una metáfora: así como la Tierra se puede considerar un punto respecto a su distancia a las estrellas fijas, una pelota es un punto respecto al radio de la esfera terrestre. Por lo cual la Tierra se puede considerar como una diferencia o infinitamente pequeño respecto a las estrellas fijas, pero a la vez un infinitamente grande con respecto al diámetro de la pelota, y la distancia a las estrellas fijas un infinito infinitamente grande respecto al diámetro de la pelota. La incomparabilidad queda, así, asegurada en los distintos órdenes de infinitamente pequeños... Pero también que el infinitamente grande y el infinitamente pequeño son elementos relativos, no existentes en sí como infinitos reales y, por ello, inútiles para el cálculo y pueden ser eliminados. En el fondo, Leibniz no cree en la existencia de tales infinitudes. Varignon considera que la metáfora leibniziana es una comparación grosera para hacerse entender por todo el mundo.

El 2 de Febrero de 1702 Leibniz contesta a Varignon directamente por vez primera y lo hace con amplitud. Es nítido en la separación, en la barrera que debe haber entre el hacer operatorio del geómetra y las discusiones metafísicas acerca de la naturaleza ontológica de las magnitudes infinitesimales. Como la correspondencia es, hasta ese momento, privada, Leibniz escribe a Varignon con radical franqueza:

> «Mi deseo ha sido señalar que no se tiene necesidad de hacer depender el Análisis matemático de las controversias metafísicas, ni asegurar que haya en la naturaleza líneas infinitamente pequeñas en comparación con las nuestras, ni por consiguiente que haya líneas infinitamente más grandes que las nuestras y sin embargo terminadas, lo mismo que me ha parecido que el infinito tomado en rigor debe tener su fuente en lo inacabado, sin lo cual no veo medio de encontrar un fundamento propio para discernirlo de lo finito. (MS IV, 91)»

Para evitar esas controversias y posibles sutilidades que las subtiendan, Leibniz confiesa que prefiere emplear imágenes sensibles que sean comprendidas por todos. De aquí su intento de explicar el infinito mediante el criterio de comparabilidad por el cual basta concebir cantidades incomparablemente mayores o menores que las nuestras, lo que posibilita, a la vez, aclarar los grados de incomparables. Agrega:

> «Es para este efecto que he dado un día los lemas de incomparables en las Actas de Leipzig, que se pueden entender como se quiera, sea como infinitos en rigor, sea como únicamente magnitudes que no entren en conflicto unas con otras. (id. 92)»

Con una precisión, los incomparables, al no quedar fijos o determinados, se pueden tomar tan pequeños como se quiera por lo cual el error cometido puede hacerse tan pequeño como se quiera. De aquí que si alguien los quiere considerar como auténticos infinitos, tiene todo su derecho a hacerlo pero también lo tiene quien les niegue toda consideración ontológica, si alguno no los considera como “cosas reales”. Quizá Leibniz piense, para sus adentros, que en ambas posiciones se enfrenta al geómetra extravagante... El criterio de comparabilidad no es más que un recurso propio del algoritmo, del cálculo y nada tiene que hacer en el terreno ontológico. Es un recurso estrictamente interno al hacer matemático.

Sin embargo, aquél matemático que niegue existencia real a los infinitamente pequeños puede servirse de los mismos, más aún, no tiene más remedio que utilizarlos aunque no sea más que

> «Como nociones ideales que abrevian el razonamiento, parecido a lo que se llaman raíces imaginarias en el análisis común (como por ejemplo $\sqrt{-2}$), que por muy imaginarias que se les llame no dejan de ser útiles, e incluso necesarias para expresar analíticamente las magnitudes reales; siendo imposible por ejemplo expresar sin intervención de los imaginarios el valor analítico de una recta necesaria para hacer la trisección del ángulo dado, como no se podría establecer nuestro cálculo de las Trascendentes sin emplear las diferencias que están sobre el punto de desaparecer, tomando de un golpe lo incomparablemente pequeño en lugar de lo que se puede asignar como siempre más pequeño hasta el infinito. (id. 92)»

De modo implícito aquí se tiene el rechazo de lo que después se denominará paso al límite; las diferencias, por pequeñas que sean, no tienden a cero, sino que han de ser tomadas en sí y el total de ellas, como en el caso de las series infinitas, han de ser consideradas de un golpe.

No por ello la Ciencia del infinito le parece a Leibniz que quede degradada y reducida a quimeras imaginarias. Raíces imaginarias, diferenciales, como elementos o nociones ideales, no por ello carecen de fundamento, no son arbitrarias. Como indica a Varignon cabe admitir un infinito sincategoremático, en el decir de la escuela, en el sentido de que una serie infinita se puede tomar en su totalidad: un número como 2 viene dado por la serie infinita $\sum 1/2^n$ tomada de un golpe sin tener que ir asignando valores cada vez más pequeños hasta el infinito. Nuevamente la huella de la "serie de Leibniz". Un infinito sincategoremático o multitud infinita pero no numerable frente al infinito categoremático que denota una multitud constituida por una infinidad numerable de partes. Algo en lo cual insistirá en *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano* redactados hacia 1704 y donde escribe frente a Locke,

> «Propiamente hablando, es verdad que hay una infinidad de cosas, es decir, que siempre hay más de las que podemos designar. Pero si se les toma como auténticos todos, entonces no hay número infinito ni línea ni cualquier otra cantidad que sea infinita, como es fácil de demostrar. (.) En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto, que es anterior a toda composición y no está formado por adición de partes. (Libro II, Cap. XVII, *Sobre la Infinitud*, p. 181)»

Los números, las líneas, el espacio están compuestos de adición de partes y por ello

> «Se equivoca quien quiera imaginarse un espacio absoluto que sea un todo compuesto de partes; no hay tal, es una noción que implica contradicción, y esos todos infinitos, como sus opuestos infinitamente pequeños, no son usados más que en el cálculo de los geómetras, como en álgebra se usan las raíces imaginarias. (id. 182-183)»

El infinito como total no es susceptible de determinación numérica, no puede haber número infinito. La razón, para Leibniz, clara: es una noción que implica, en sí, contradicción. Y la implica porque si hubiera un número infinito todos los agregados tendrían la misma potencia, es decir, habría tantos números pares como impares y como naturales; pero también tantos números triangulares como piramidales como naturales y como puntos en la recta, y curvas y curvas analíticas... El principio de reflexividad choca con el principio del todo y sus partes propias.

Lo cual no implica que pueda admitirse el infinito actual y de tal manera que afecte a la naturaleza de modo total para marcar mejor las perfecciones de su Autor. Un infinito actual pero en enfoque intensional, nunca extensional o distributivo y, por ello, no constituido por partes. Sólo lo constituido por partes, los agregados enfocados distributivamente, son numerables, cuantificables.

Si es absurda la idea de un número infinito como dado actualmente, sin embargo, en el Cálculo apoyado en la característica, en el manejo *ciego* de los caracteres, se tiene la confianza en los mismos como si se tratara con cosas reales. Es esa confianza la que ha llevado a admitir las raíces imaginarias desde el álgebra. Es desde la operatividad con las ecuaciones algebraicas desde las que se ha impuesto la *existencia* de dichas raíces porque son imprescindibles para la resolución de dichas ecuaciones. Por ello se puede afirmar que dichas raíces imaginarias tienen *fundamenta in re,* como escribe Leibniz a Varignon en esta carta, y donde muestra el caso que enseñó a Huyghens y que a este le dejó sorprendido: $\sqrt{\left(1+\sqrt{-3}\right)}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ es igual a √6. Por el mismo motivo se puede decir:

> «que los infinitos e infinitamente pequeños están tan fundados que todo se hace en Geometría, e incluso en la naturaleza, como si fueran perfectas realidades (id. 93)»

como lo prueba, precisamente, la existencia del Análisis de los Trascendentes. Una prueba a posteriori precisamente.

A Leibniz no le satisface el sólo apoyo en el cálculo “ciego” de caracteres o en la pura pragmática, en el hecho de que estos elementos den resultados y muy positivos y por ello tengan que ser aceptados. De aquí que junto al criterio intrínseco matemático de la comparabilidad va a agregar que también lo prueba su ley de continuidad aunque, aquí, se pase a otro terreno, a la Metafísica. Y ello porque la continuidad es una cosa ideal que jamás se da en la naturaleza, que pertenece a los posibles pero también a los actuales tomados como posibles como escribirá a Völder poco después, enero de 1706 o a Foucher por la misma época y donde mantiene:

> «Es la confusión de lo ideal y de lo actual la que ha embrollado todo y hecho el laberinto de *compositione continuii*. (PS IV, 491)»

Reafirmando que el número y la línea no son cosas quiméricas porque son las razones que encierran verdades eternas. Que son las que regulan los fenómenos de la naturaleza.

Siguiendo con la carta a Varignon, Leibniz mantiene que el continuo jamás se da en la naturaleza ya que en ella no hay partes perfectamente uniformes y, sin embargo,

> «en recompensa lo real no deja de gobernarse perfectamente por lo ideal y lo abstracto, y se encuentra que las reglas de lo finito se logran en lo infinito, como si hubiera átomos (es decir elementos asignables de la naturaleza) aunque no haya punto de la materia que esté actualmente subdividido sin fin; y viceversa... (MS IV, 93)»

El 14 de Abril de 1702 Leibniz, y como de pasada, le señala a Varignon que hace años había escrito a Jean Bernoulli que los infinitos y los infinitamente pequeños podrían ser tomados como ficciones, sin hacer daño al Cálculo, pero ficciones fundadas en la realidad.

En vista de las polémicas en la Academia de Ciencias de París, el 20 de Junio de 1702 Leibniz vuelve a escribir a Varignon y, en su estilo más clásico, divide la carta en dos partes: la primera puede hacerse pública y es una crítica al ensayo de Rolle y su idea equivocada de la tangente relativa. La segunda parte, en post-data, es privada. Se muestra de acuerdo en que la Academia haya tratado de que cese la polémica y pide que se le envíen lo que de instructivo haya en la misma dejando a un lado las cuestiones personales y de agravios. En lo que aquí interesa acerca de la naturaleza de las diferenciales afirma

> «Para decir la verdad, yo mismo no estoy muy convencido de que se requiera considerar a nuestros infinitos e infinitamente pequeños de otra manera que como cosas ideales y como ficciones bien fundadas. Creo que no hay criatura más allá de la cual no haya una infinidad de criaturas; sin embargo, no creo que haya ni incluso que las pueda haber infinitamente pequeñas, y esto creo poder demostrarlo. Es que las sustancias simples (es decir no seres por agregación) son verdaderamente indivisibles, pero son inmateriales, y no son más que principios de acción. (MS IV, 110)»

Es la concepción global, metafísica, de Leibniz, la que impide considerar lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño como sustancias y, en el caso de los infinitamente pequeños, como sustancias simples. Por no serlo, han de ser concebidos a partir de la consideración de lo limitado, de lo acotado. Por esa limitación, lo que designa un número infinito no es más que la noción de que siempre hay uno mayor a cualquier número dado; una recta infinita, que puede ser prolongada más allá de cualquier magnitud asignable porque “pertenece a la esencia del número, de la línea, y de un todo cualquiera, ser acotado” como escribe a Des Boses el 11 de Marzo de 1706. En Matemática, el único infinito es el potencial, no el actual.

Las ideas de Leibniz, realmente, se habían mantenido en privado salvo las notas sobre los incomparables. A la muerte de L’Hopital, Fontenelle realiza el elogio fúnebre el 2 de Abril de 1704. En él, defiende el nuevo cálculo. Afirma:

> «El señor L’Hopital decidió comunicar sin reserva los secretos ocultos de la nueva geometría, y lo hizo en el famoso libro *Analyse des infiniment petits*, que publicó en 1696. En él fueron revelados todos los secretos del infinito geométrico y del infinito del infinito; en una palabra, de todos estos diferentes órdenes de infinitos que se levantan los unos por encima de los otros, y forman el edificio más asombroso y más audaz que la mente humana jamás se haya atrevido a imaginar. (*Análisis*, 12)»

El debate, en Francia, parece terminar con el triunfo de los analistas justamente a la muerte de L’Hopital. Aunque vuelve a estallar hacia 1705 al mantener Rolle nueva polémica con Saurin, defensor del Cálculo y ello obliga a nombrar a la Academia otro jurado. Sólo tras la muerte del abate Gallois, en 1707, Rolle cambia de actitud y pasa a ayudar a los analistas. Como Varignon revela a Leibniz, Rolle actuaba incitado precisamente por Gallois quien lo utilizaba de una manera insidiosa. Como en 1709 Rolle vuelve a polemizar, esta vez con La Hire, Leibniz le comentará irónicamente a Varignon, en carta de 1710,

> «M. Rolle podría ser llamado *pater difficultatum*, como a un cierto Ministro; parece nacido para crear dificultades. (MS IV, 169)»

A las palabras de Fontenelle de elogio a L'Höpital, a su anuncio de elaborar una filosofía de los infinitamente pequeños, Leibniz responde insistiendo en las barreras entre lo operatorio y lo ontológico. En carta de 9 de Septiembre de 1704 Leibniz le escribe:

> «Espero vuestras bellas meditaciones sobre el infinito o infinitamente pequeño. Es verdad que para mí, los infinitos no son todos y los infinitamente pequeños no son magnitudes. *Mi metafísica los expulsa de sus tierras*. (De Burbage-Chouchan, 81, subr. mío)»

La convicción de Leibniz de ser ficciones útiles para el cálculo se ha mantenido constante aunque es convicción que permanece casi en privado. Sin embargo, a partir de 1704, con sus polémicas con Foucher, con Völder, en las precisiones a Fontenelle, pasa a ser radicalmente pública. Ya en 1710, en *Teodicea*, escribe respecto a las cantidades infinitamente grandes o pequeñas que «todo eso es nada sino ficciones; todo número es finito y asignable, como lo es igualmente toda línea».

Un cambio, de lo privado a lo público, que no es arbitrario. Leibniz, dos meses antes de morir, revela el por qué ha mantenido su relativo silencio público en este punto, a pesar de las peticiones de Varignon, de la presión de las polémicas. En Septiembre de 1716 escribió:

> «En cuanto al cálculo de los infinitesimales [...] cuando (nuestros amigos) se disputaban en Francia [...], les manifesté que yo no creía que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales: que sólo eran ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente [...].Pero como el señor Marqués de L'Hopital creía que por ello yo traicionaba la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que había dicho en un lugar de las *Actas* de Leipzig; con placer accedí a su ruego. (*Análisis*, 12)

Son las relaciones Leibniz-L'Höpital las que, de alguna manera, justifican hasta la posición pública leibniziana respecto a la naturaleza ontológica de las diferenciales, de las magnitudes infinitamente pequeñas: no expresar que son cosas ideales o ficciones útiles, aunque necesarias y bien fundadas, teniendo presente que lo real se deja gobernar por lo ideal... Con la precisión de que, en cualquier caso y frente al geómetra extravagante, para Leibniz no se requieren discusiones metafísicas en el Cálculo diferencial. Cálculo diferencial cuya sustancia ha quedado expuesta, y ya para todos y no sólo para un grupo de iniciados, en la obra del marqués de L'Höpital.

BIBLIOGRAFÍA

LEIBNIZ

MS: GERHARDT, *Mathematische Schriften*. Olms, 1971
PS: GERHARDT, *Die Philosophische Schriften*, Olms 1965
OP: COUTURAT, *Opuscules el fragments inédites*. Olms, 1996
AI: *Análisis Infinitesimal*. Tradn. Teresa Martín Santos. Tecnos, M. 1994[2]. Estudio preliminar J. de Lorenzo.
DM: *Discurso de metafísica*. Versión, prólogo y notas de Julián Marías. Alianza Ed.. M. 1982
Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano. Traducción, notas e Introducción, Javier Echeverría. Editora Nacional, M. 1977

Para la Característica Geométrica: LEIBNIZ, *Caractéristique géométrique*. Textos establecidos y anotados por Javier Echeverría, con una Introducción del mismo. VRIN, P. 1995. La trdn. francesa es de Parmentier.
Para la Característica Numérica Universal y la Lógica: MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS, *Obras escogidas, Vol. I: Concepto y Número. La Característica Numérica Universal***.** Ed. a cargo de J. de Lorenzo. UPV, 2002. Estudio preliminar de J. de Lorenzo, *Miguel Sánchez-Mazas y el Sueño de Leibniz.*
Para la Polémica Leibniz-Newton: ALFONSO PÉREZ LABORDA, *Leibniz y Newton*, *Vol. I*, *La discusión sobre la invención del cálculo infinitesimal*, Univ. Pontificia Sa, 1977. *Vol. II, Física, Filosofía y Teodicea*. Univ. Pont. Sa. 1981.

BURBAGE – CHOUCHAN: *Leibniz et l'infini*. Puf, P. 1993
ECHEVERRÍA, J.: *Leibniz*. Barcanova, B. 1981

Análisis: MARQUÉS DE L'HÖPITAL: *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Intrdn. y Tradn. Rodrigo Cambray. Mathema. México 1998.

APÉNDICE

Triángulo característico

En el *Traité des sinus du quart de Cercle* Pascal maneja el triángulo característico ante el cual Leibniz siente su primera iluminación. Pascal toma el arco del cuarto de circunferencia BC constituido por arcos iguales infinitesimales. Sea D uno de los puntos de división. Se traza el radio AD perpendicular a la tangente EE' en D siendo DI el seno del arco. El triángulo EKE' es el *triángulo característico*. Se observa que es semejante al triángulo ADI. Por esta semejanza se establecen las proporciones

AD/DI = EE'/RR' = EE'/EK de donde DI.EE' = AD.E'K = AD. RR'

Escribiendo DI = y, r =AD, Δs = EE', Δx = RR' la proporción anterior se convierte en
y. Δs = r. Δx o si se prefiere, y.ds = r.dx
Al girar alrededor del eje AC se obtiene el área de una zona infinitesimal

$$dA = 2\pi DIds = 2\pi yds = 2\pi rds$$

Sumando esas áreas infinitesimales y por la relación anterior

$$\int dA = \int 2\pi yds = 2\pi r\int dx = 2\pi r^2$$

y el área de la esfera es el doble: A = $4\pi r^2$

Con este procedimiento Pascal llega a obtener en este *Tratado* resultados como

$$\int \sin\alpha d\alpha = \cos\alpha$$

$$\int \sin^2\alpha d\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

y bastantes más, todos ellos correspondientes al cálculo integral...

Leibniz adopta este triángulo característico para cualquier curva que consiste en una infinidad de segmentos infinitesimales. Con lo cual el triángulo característico pasa a ser el de la figura adjunta. En él, por la semejanza de los triángulos rectángulos, se tienen las proporciones:

a. ds/n = dx/y luego y ds =n dx que pasada a suma es ∫y ds = ∫n dx que es la que posibilita obtener el área de una superficie de rotación alrededor de un eje, siguiendo el mecanismo de Pascal anterior.
b. dy/ν = y dy que pasado a suma queda ∫y dy = ∫dy/ν
c. ds/t = dy/y que de modo análogo ∫yds = ∫t dy. Si se supone que y= a, constante, entonces ∫y ds = a ∫ds = ∫t dy por lo que la rectificación de una curva dada por su diferencial ds se reduce a una cuadratura, la del área de la región entre el eje y y una curva cuya abscisa es tangente a la curva dada.

Son las proporciones que maneja en los diferentes problemas de diferencias y sumas, recíproco uno del otro.

Sucesiones y series

Sea la sucesión $<a> = <a_1, a_2, a_3, ... , a_n>$. Se toma la sucesión de sus diferencias $<a_2-a_1, a_3-a_2, ... , a_n-a_{n-1}>$ y se ve que la suma de esta sucesión de diferencias es a_n-a_1.
Por ejemplo: $<a> = <0, 1, 4, 9, ... , n^2>$. La sucesión de sus diferencias $<1,3,5,..., 2n-1>$ por lo cual la suma de las mismas quedaría $1+ 3 +5+...+(2n-1) = n^2 – 0 = n^2$.

Si los términos de la sucesión son decrecientes y tienden a 0 y las diferencias se toman al contrario, es decir, $a_{n-1}-a_n$, entonces la suma de las diferencias es, precisamente, el primer término de la sucesión. Ejemplo: $<a> = <1, ½, 1/3, ... , 1/n, ... >$, sus diferencias forman la sucesión $< ½ , 1/6, 1/12, ... >$ luego la suma de las diferencias sería
½ + 1/6 + 1/12 + ... = 1 que es el primer término de $<a>$.

Triángulo aritmético o de Pascal y triángulo armónico

El *triángulo de Pascal* como aparece en sus escritos es

Fila de unidades	1	1	1	1	1	1 ...	
Naturales	1	2	3	4	5	6...	$a_n = n$
Triangulares	1	3	6	10	15	...	$a_n = n(n+1)/2$
Piramidales	1	4	10	20	35 ...		$a_n = n(n+1)(n+2)/6$

. . . .
Los triangulares se forman sumando los triangulares de la fila anterior correspondiente, pero también se observa que son la diferencia de los piramidales de su fila siguiente. Los piramidales se forman sumando los elementos correspondientes de la fila anterior...

Triángulo *armónico* de Leibniz

1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 ...
1/2 1/6 1/12 1/20 1/30 ...
1/3 1/12 1/30 1/60 ...
1/4 1/20 1/60 ...
1/5 1/30 ...
1/6 ...

Se observa que en lugar de sumas se manejan diferencias: cada término es la diferencia de los dos anteriores correspondientes. Además, la sucesión que compone la primera fila es tal que la sucesión de sus diferencias constituye la segunda fila por lo cual la suma de esta fila será, precisamente, 1. De modo análogo ocurre con la segunda fila de la cual la tercera es la sucesión de sus diferencias y, por ello, la suma de esta tercera fila será
1/3 + 1/12 + 1/30 + 1/60 + ... = ½.

Es lo que ocurre con cada fila: la siguiente es la sucesión de sus diferencias. De aquí que para Leibniz resultó fácil resolver la cuestión que le planteara Huygens: hallar la suma

1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ... que no es más que la segunda fila del triángulo armónico multiplicada por 2, luego la suma de la misma es 2.

En todos los casos, la suma de una serie infinita da un término finito. Lo subrayado por Leibniz en su carta al duque de Hannover en 1679 pidiendo ayuda para su *Característica universal*.