Recepción y extensión de las explicaciones metafísicas de los números imaginarios en la España del siglo XIX

JOSÉ M. PACHECO CASTELAO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

1. Preliminares

El problema del rigor en Matemáticas puede afrontarse al menos desde dos puntos de vista. El primero, que encontramos sobre todo en las Matemáticas contemporáneas, procede del explosivo desarrollo de esta ciencia durante el Siglo XIX y se distingue sobre todo porque los matemáticos ejercientes son entrenados en ciertas técnicas que en líneas generales se componen de una mezcla de habilidades de cálculo, uso generalizado de referencias cruzadas y la capacidad de deducir resultados de fuentes autorizadas y reconocidas. Por regla general este entrenamiento se considera *el standard* y en gran medida ha redundado en la desaparición de la mayor parte de los razonamientos intuitivos en grandes áreas de las Matemáticas. El segundo punto de vista es el intento de basar los desarrollos de las Matemáticas en principios sólidos referentes al estatus filosófico de las ideas que intervienen.

La Historia nos ofrece una gran cantidad de nomenclatura matemática aplicada a diversas clases de números, tales como *negativos*, *imposibles*, *sordos*, *imaginarios*…, por citar solo algunos de los calificativos utilizados cuando las operaciones aritméticas no resultaban evidentes con alguna nueva clase de números: Nótese que todos esos nombres denotan una cierta cualidad de imposibilidad metafísica, que habría que gestionar adecuadamente para que los cálculos con estas entidades no se salieran de lo puramente formal. Ambos puntos de vista son de naturaleza diferente y tienen distintos ámbitos de aplicación. El primero se enfatiza cuando una teoría matemática se presenta axiomáticamente y despide un ligero aroma sintáctico, mientras que el segundo queda reservado para cuestiones más fundamentales e intenta preservar la unidad de las Matemáticas estableciendo conexiones conceptuales entre las sucesivas ampliaciones y desarrollos. Hoy veremos un caso del segundo tipo, un episodio relativo a la introducción de los números complejos en España a mediados del XIX, y veremos que el rigor de la segunda clase puede venir acompañado por una falta absoluta del de la primera clase, ofreciendo un resultado de bastante baja calidad. Sin embargo, también aparecerán interesantes cuestiones filosóficas y matemáticas a lo largo de la exposición.

La cualidad filosófica de los números negativos e imaginarios fue un problema recurrente para algunos filósofos y matemáticos ilustrados a lo largo del XVIII, aunque su uso práctico puede rastrearse en los primeros días del Álgebra, en las obras de Girolamo Cardano (1501-1576) y Raffaelle Bombelli (1526-1578) al tratar el problema clásico de dividir una cantidad dada en otras dos cuyo producto es también dado. Conviene notar que el interés de estas consideraciones se vio incrementado debido a la emergencia del Álgebra como una especie de Aritmética Universal profundamente relacionada con las consideraciones metafísicas referentes a las propiedades de los entes manipulados. Una observación matemática de gran interés acerca de estos precursores es que no consideraban las soluciones complejas de una ecuación polinómica como soluciones *stricto sensu*, sino como entidades que satisfacían las funciones simétricas de las raíces. Esta idea, utilizada hasta bien entrado el XIX (por ejemplo, [Gilbert 1831]) es posiblemente la primera aparición del concepto de *solución débil de una ecuación*, en la línea, por ejemplo, de la consideración de funciones no diferenciables como posibles soluciones de ecuaciones diferenciales que dio origen a la Teoría de Distribuciones.

Además, hacia 1800 el Álgebra estaba ya lista para recibir las magnitudes vectoriales, cuyas operaciones aritméticas exigen contar con diferentes propiedades (reflejadas en las respectivas coordenadas) simultáneamente: Son operaciones *sincategoremáticas*. Pero la recepción de estas ideas en España se pospuso bastante y la encontramos en textos utilizados tras 1870 en la Enseñanza Media, a veces en la Superior, hasta los primeros años del Siglo XX. Por supuesto, la historia de las Matemáticas españolas del siglo XIX no es tan interesante como la de otros países europeos (por ejemplo, no encontramos referencia alguna a España en [Klein 1926]) pero se halla íntimamente relacionada con la turbulenta atmósfera política y cultural del siglo, y que propició varias reformas educativas en nuestro país. Aún no existe un estudio completo de estos temas, siendo [Suárez 2006] un apreciable intento.

2. El personaje: Sinopsis biográfica de Rey Heredia

La historia del estudio de los números complejos en España desde el punto de vista filosófico es la del empeño del filósofo y matemático autodidacta José María Rey Heredia (1818-1861), contemporáneo de Bernhard Riemann (1826-1866). Se halla contenida en su libro póstumo *Teoría Transcendental de las Cantidades Imaginarias* publicado en 1865, tras la muerte del autor, a expensas del Ministerio de Instrucción Pública. Los herederos de Rey presentaron el libro a un concurso nacional de libros de texto con el objeto de estudiar ideas para su aplicación en la mejora de la Enseñanza Media. Este tipo de concursos se convocaba en aplicación de la Ley Moyano, debida al ministro Claudio Moyano (1809-1890) que la promocionó.

La mayor parte de los datos biográficos de Rey se encuentran en el largo prólogo a *Teoría* redactado por el político, médico y académico Luis Felipe Monlau (1808-1871) que había sido coautor de Rey en un libro en dos volúmenes titulado *Curso de Psicología y Lógica* publicado en Madrid el año 1849.

Rey nació en Córdoba y a la edad de quince años entró en el Seminario, donde permaneció unos once años, aunque finalmente no se ordenó. Durante los últimos años que permaneció allí colaboró en la docencia de filosofía y francés a los estudiantes más jóvenes. Claramente los estudios eclesiásticos de Rey influyen en sus textos, donde las citas en latín se presentan sin traducción. Al abandonar el Seminario se le ofreció un puesto de profesor de Lógica en un colegio privado de Córdoba, pero prefirió trasladarse a la cercana Ciudad Real como profesor de la misma materia en un Instituto oficial. En 1846 obtuvo el grado civil de *Bachiller en Filosofía* y fue nombrado Catedrático del Instituto madrileño de Noviciado, que aún existe con el nombre de «Cardenal Cisneros», donde escribió la parte de Lógica del *Curso* antes citado y conoció en 1850 al Catedrático de Matemáticas y posterior político y académico Acisclo Fernández-Vallín Bustillo (1825-1895), quien le introdujo en el conocimiento de los números complejos. Rey prosiguió su carrera académica con diferentes títulos, así obtuvo los de *Bachiller en Jurisprudencia* (1852), *Licenciado en Jurisprudencia* (1854), y *Licenciado en Filosofía y Letras* (1857), pero no abandonó el Instituto.

En su vida privada fue una persona respetable, de salud débil, y murió en 1861 víctima de tuberculosis, la misma enfermedad que le había dejado viudo unos años antes, en 1854. Tras su temprana desaparición el ayuntamiento de Córdoba le dedicó una calle, hoy larga y bulliciosa, aunque pocos cordobeses saben hoy día que lleva el nombre de un matemático.

3. La formación de Rey

Los *Elementos de Lógica* de Rey (*Lógica* de ahora en adelante) es un libro publicado en 1853, al evolucionar el libro coescrito con Monlau en dos textos independientes, y representa la primera fuente para conocer las bases filosóficas y culturales, así como las opiniones de su autor. *Lógica* tuvo muchas ediciones hasta finales del siglo XIX. Para este trabajo se ha utilizado un ejemplar de la duodécima edición [Rey 1849] del año 1883 publicado por la clásica imprenta Sucesores de Rivadeneyra. Este texto es un tratado de Lógica clásica que abarca Gramática y Dialéctica, pensado para su uso en centros de Secundaria y cuyo objetivo es alcanzar soltura en el arte de encadenar razonamientos plausibles para mantener duelos dialécticos. La exposición es bastante unitaria, escrita en muy buen español, con el estilo florido típico del XIX y se halla dividido en cuatro partes o libros, así como un largo capítulo introductorio titulado *Prenociones*.

A partir del estudio de *Lógica* es difícil adscribir a Rey a alguna corriente filosófica concreta. Por supuesto, en la época en que escribió el libro, en su treintena, tenía conocimiento de varios problemas clásicos y de la obra de los autores más conocidos, pero no parece haberse definido en ningún sentido. Desde luego, y tal como muestra la duodécima edición, Rey no incluyó nada relativo a las nuevas teorías lógicas desarrolladas por su contemporáneo George Boole (1815-1864), cuyo libro *An investigation into the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* fue publicado en 1854. Sin embargo, en las páginas 256-257 declara, al tratar del *sorites* o deducción mediante proposiciones encadenadas,

$$(p_1 \ es \ p_2) \wedge \ldots \wedge (p_i \ es \ p_{i+1}) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \ es \ p_n) \Rightarrow (p_1 \ es \ p_n)$$

que:

> *Puede compararse el sorites á una serie de ecuaciones en que concluimos la igualdad de dos extremos por ser iguales á varios términos medios…*

Algunos estudios [Calero 1994] apuntan a Rey como un *idéologue* tardío, seguidor de la corriente filosófica, lingüística y pedagógica desarrollada alrededor de Antoine Destutt-Tracy (1754-1836) en los años finales del siglo XVIII siguiendo los pasos de John Locke (1632-1704), del Abate Condillac (1715-1780) y otros más [Picavet 1891]. Este grupo fue muy influyente en el diseño de políticas educativas en la Francia prenapoleónica, y se notó su contribución en otros varios países. Por ejemplo, el libro de Destutt *Élements d'Idéologie* fue el origen del texto del matemático español y Catedrático de Salamanca Juan Justo García (1752-1830) publicado como *Elementos de Lógica Verdadera*, prácticamente una traducción del de Destutt aparecida en Madrid en 1821. García tiene el privilegio de haber sido el primer profesor que explicó Cálculo

Diferencial en instituciones universitarias españolas [Cuesta 1985]. Las ramificaciones de los ideólogos se pueden encontrar en textos tales como el norteamericano [Colburn 1831]:

> *Success in reasoning depends very much upon the language which is applied to the subject, and also upon the choice of the words that are to be used* (p. 241).

Para este trabajo es relevante citar la *définition idéologique* que da Rey en la página 114 de *Lógica* de signo o símbolo:

> *[un signo es una] cosa cualquiera considerada como medio que nos conduce al conocimiento de otra*,

idea que usará después en *Teoría* al tratar las diversas interpretaciones de la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Tal vez una elección más acertada sería considerar a Rey como un *ecléctico*, tal como muestra el listado de autores citados en *Lógica*, donde encontramos a Pierre Royer-Collard (1763-1845) y Victor Cousin (1792-1867) o Felicité Lamennais (1782-1854), así como algunas expresiones dubitativas acerca de la todavía prevalente *Lógica de Port Royal* –está a favor en la página 124 y en contra en la 118–, y también por su familiaridad con algunos filósofos de la escuela escocesa del Sentido Común, como Thomas Reid (1710-1796) [Reid 1764].

En toda la extensión de *Lógica*, el nombre de Emmanuel Kant (1724-1804) aparece una única vez (p. 232):

> *El paso de las proposiciones a sus contrarias las llama Kant* «*raciocinio del entendimiento*»

Y no se hace mención alguna de la Lógica Trascendental ni de cualquier otra idea kantiana. Por tanto resulta una novedad la entusiasta aplicación –hasta el punto de incluir una traducción de la primera parte de la Lógica Trascendental extraída de la *Crítica de la Razón Pura*– de conceptos y métodos kantianos en *Teoría*. Podemos concluir que Rey debió de estar entre los primeros lectores de Kant en España, bien en traducciones fragmentarias del francés[1] o incluso directamente en este idioma. Véase [Albares 1996] para un estudio de la recepción de Kant en España durante la primera mitad del XIX. Por tanto, nos queda la duda de qué grado de profundidad tenía el conocimiento de Kant por parte de Rey, aunque posteriormente fue clasificado como kantiano [Méndez Bejarano 1927].

Otro aspecto interesante mostrado por Rey en *Teoría*, además de su cita de Reid, es su conocimiento de dos autores británicos considerados entre los creadores del Álgebra en su sentido moderno: George Peacock (1791-1858) y John Warren (1796-

---

[1] La primera traducción directa del alemán al español de la *Crítica de la Razón* Pura, aunque incompleta, fue realizada por el filósofo y político hispano-cubano José del Perojo Figueras (1852-1908) y apareció en 1883. Existen varias ediciones de esta traducción publicadas por Losada en Buenos Aires, la última conocida es de 1979. Perojo fue elegido dos veces diputado por Las Palmas, donde tiene dedicada una calle y existe una estatua con un busto suyo.

1852). Tenemos la impresión de que durante la última década de su vida Rey fue poniendo al día su base filosófica y matemática, muy posiblemente como preparación para los sucesivos exámenes de su carrera académica.

4. La *Teoría* de Rey

Teoría es un libro bellamente impreso de XX+330 pages publicado en 1865 por la Imprenta Nacional de Madrid. Rey comenzó a trabajar en él hacia 1855 y dedicó a su escritura los cinco últimos años de su vida. La *Teoría* es un ejemplo de buen español, y se halla ilustrada con una gran cantidad de litografías y figures geométricas supervisadas por Vallín, quien también comprobó –con poco éxito, como veremos más adelante– las matemáticas del libro.

Para Rey el oficio de filósofo/matemático se encuenta descrito por el lema atribuido a Pierre Simon de Laplace (1749-1824) por F. Coyteux –autor de un libro publicado en Paris por Moreau el año1845: *Exposé d'un systéme philosophique suivi d'une théorie des sentiments ou perceptions*– y que cita al principio de su obra:

> *Il faut refaire les Mathématiques, les placer sur un nouveau piédestal: Il serait à désirer que ce fût l'oeuvre d'un homme nouveau, qui fût étranger aux mouvements et aux progrès des sciences et n'en connût que les premiers éléments.*

Este programa, en cierto sentido predecesor de las escuelas logicistas de alrededor de 1900 –incluso podríamos decir que de Bourbaki– parece hallarse en la base de todos lose estudios posteriores sobre fundamentos de las Matemáticas. Desde luego Rey insiste en él varias veces a lo largo de *Teoría*, especialmente en la parte final de la Introducción, donde escribió su más profundo convencimiento sobre esta idea y sobre la idoneidad de la Lógica Trascendental para el estudio de los números complejos.

He aquí el índice de *Teoría*:

Prólogo de Monlau
Introducción
Libro I: Sobre la naturaleza e interpretación de las cantidades imaginarias.
- Capítulo I: Exposición matemática del concepto de cualidad.
- Capítulo II: Sobre las cantidades imaginarias consideradas como raíces.
- Capítulo III: Sobre el modulo y el argumento de las cantidades imaginarias.
- Capítulo IV: Interpretación del *imaginarismo* en las ecuaciones de segundo grado.
- Capítulo V: Interpretación del imaginarismo en las secciones cónicas.
- Capítulo VI: Sumario del Libro y transición a los siguientes.

Libro II: Sobre las cantidades imaginarias en el algoritmo de la suma.
- Capítulo I: Sumas algebraicas.
- Capítulo II: Suma sincategoremática de cantidades.
- Capítulo III: Sobre sumas poligonales.

Libro III: Las cantidades imaginarias en el algoritmo de la producción.
- Capítulo I: Productos binarios.
- Capítulo II: Sobre productos ternarios.

Libro IV: Las cantidades imaginarias en el algoritmo de la *graduación* (elevar a potencias).

- Capítulo I: Graduación algebraica.
- Capítulo II: Teoría algebraica de la graduación de cantidades imaginarias.
- Capítulo III: Sobre las raíces de la unidad.
- Capítulo IV: Consideración dinámica de las raíces imaginarias.
- Capítulo V: Teoría trigonométrica del imaginarismo.
- Capítulo VI: Construcción gráfica de las raíces de la unidad.
- Capítulo VII: Graduación infinita de cantidades imaginarias.
- Capítulo VIII: Sobre exponenciales imaginarias.

Sumario de los últimos tres Libros.
Sumario del trabajo completo.
Traducción del Capítulo sobre la Lógica Trascendental de la *Crítica de la razón pura*.
Glosario de los términos empleados en el libro.

La *Teoría* de Rey no debe considerarse un intento aislado. Existen muchos más libros y monografías de su época dedicados a la cuestión de los números imaginarios y de otras clases de objetos matemáticos desde el punto de vista fundamental. Además del texto primero de Warren, *Treatise on the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities*, de 1828, tenemos el largo resumen austro-húngaro [Matzka 1851], citado en [Hoüel 1874], así como la interesante disertación holandesa [de Haan 1863]. Con nuestros conocimientos actuales, es difícil precisar si Rey conocía algunos de estos trabajos, aunque lo más probable es que no. Sus fuentes son francesas y británicas, aunque no cita a William Rowan Hamilton (1805-1865), por poner sólo una ausencia importante.

5. *The French Connection*: Rey, Buée, Pascal

Rey atribuye, en su Introducción a *Teoría*, a un cierto *Mr. Buée, emigrado francés*, la gloria del descubrimiento, o de la observación, de que las cantidades imaginarias pueden utilizarse para representar la perpendicularidad en el plano.

Adrien-Quentin Buée (1748-1826) fue un sacerdote francés perteneciente al gran contingente de *émigrés*, principalmente aristócratas y clérigos que escaparon de Francia hacia Gran Bretaña a partir de 1792 por causa de la Revolución Francesa. Hacia 1814, la mayor parte de ellos se hallaban ya de vuelta en Francia. Entre ellos había buen número de intelectuales que fueron bien recibidos por la sociedad británica culta, siendo Buée un buen ejemplo. Se estableció en Bath, donde intentó publicar en 1799 un libro titulado *Recherches Mathématiques sur la texture intime des corps*, aunque al parecer nunca llegó a la imprenta. Algo más tarde escribió un artículo para el Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts (1804): *Outlines of Mineralogical Systems of Romé de l'Isle and the Abbé Haüy, with Observations*, y en 1806 publicó en las Philosophical Transactions of the Royal Society la memoria sobre las cantidades imaginarias [Buée 1806], que más tarde inspiraría a Rey. Es notable que esté publicada en francés, pues son muy pocos los trabajos aparecidos en esta revista en idiomas distintos al inglés. Dejando aparte el latín que coexistió con el inglés hasta mediados del XVIII, no más de diez artículos fueron publicados en francés en las Transactions, y a partir de 1810 sólo se usó el inglés. Tras esto, Buée desaparece y vuelve a encontrárselo en París dedicado a publicar en 1821 una nueva edición de su obra satírica *Dictionnaire des termes de la Révolution*, que había aparecido anónimamente en 1792 antes de su huida a Inglaterra. La información sobre Buée puede encontrarse en [Flament 1982].

Las ideas de Buée sobre las cantidades imaginarias son uno de los últimos episodios en la aceptación de los números negativos e imaginarios como entidades matemáticamente válidas sobre bases metafísicas, tema tratado por diversos autores en el siglo anterior. Entre ellos tenemos a Abraham de Moivre (1667-1754), seguidos de John Wallis (1616-1702) [Smith 1959], Jean Argand (1768-1822) o Caspar Wessel[2] (1745-1818) [Smith 1953, Wessel 1797] entre los que estaban a favor de las cantidades imaginarias, mientras que entre los oponentes más acérrimos encontramos a William Frend (1757-1841), quien publicó sus *Principles of Algebra* en 1796. Las ideas destiladas por Buée y Robert Woodhouse (1773-1827) [Woodhouse 1801 and 1802] habrían de inspirar más de un libro, por ejemplo el ya citado de Warren que fue otra de las fuentes de Rey, y partes del tratado de Peacock *Treatise on Algebra* de 1830. También aparece citado Buée en la *Théorie Élementaire des Quantités Imaginaires*, de Hoüel, aparecida en París en fecha tan tardía como 1874 [Hoüel 1874].

Sorprende el tono neopitagórico empleado por Rey, que insiste en él a lo largo de *Teoría*, apoyándose en una frase de Blaise Pascal (1623-1662) que cita cinco veces en el libro:

Los números imitan al espacio, aunque son de naturaleza tan diferente

La frase está tomada de los *Pensées* (Série XXV, nº 592)[Pascal 1977, Vol II, p. 138] y Rey la utiliza como argumento de autoridad en varios capítulos de *Teoría*. El original francés es *Les nombres imitent l'espace, qui sont de nature si différente.* Tal vez fuera interesante analizar la traducción de Rey, donde el francés *qui* se corresponde con el español *aunque*. Lo más probable es que sea un recurso para insistir en las diferentes naturalezas de espacio y número, o algo similar. Rey sabe que los números son la representación matemática del tiempo como opuesto a espacio, y se muestra asombrado ante la aplicación de los números a la descripción del espacio. Posiblemente el estudio de la Lógica de Port Royal en la preparación de su *Lógica* llevó a Rey al estudio de Pascal, donde encontró condensada en una sola frase la idea cartesiana de traducir la geometría a ecuaciones y que intentó luego poner en práctica en *Teoría*. Más adelante debió de interpretar la frase pascaliana como una vívida aplicación de la aplicación de la teoría kantiana de las categorías al estudio de los números imaginarios.

6. Breve estudio de la *Teoría*

A primera vista, *Teoría* se presenta como un comentario largo y erudito del trabajo de Buée de 1806, que es seguido muy de cerca en las primeras partes del libro. Desde las perspectivas histórica y matemática los puntos más interesantes se hallan en la Introducción, en el Libro I (Capítulos I y II), Libro II (Capítulo II), y Libro IV. Los restantes Capítulos están dedicados a exponer los algoritmos algebraicos habituales y

[2] En el libro de Wessel (traducido por Zeuthen) se encuentra la siguiente construcción: «*Désignons par* +1 *la unité rectiligne positive, par* +ε *une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de* +1 *sera égal à 0°, celui de -1 à 180°, celui de* +ε *à 90°, et celui de* -ε *to -90° ou à 270° ; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura* : (+1)(+1) = +1; (+1)(-1)=-1; (-1)(-1)=+1; (+1)(+ε)=+ε; (+1)(-ε)=-ε; (-1)(+ε)=-ε; (-1)(-ε)=+ε; (+ε)(+ε)=-1; (+ε)(-ε)=+1;(- ε)(+ε)=-1. *Il en résulte que* ε *est égal à* $\sqrt{-1}$ *et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opération ordinaires».*

las interpretaciones geométricas de los complejos, siendo lo más interesante las magníficas litografías en blanco sobre fondo negro, así como las complicaciones de algunas explicaciones poco convincentes.

6.1. La Introducción

La Introducción es un largo texto programático de 22 páginas de prosa fluida y elaborada. Dividida en trece secciones dedicadas a varios aspectos con ideas generales sobre Matemáticas, el concepto de cantidad imaginaria, su historia, la necesidad de la Metafísica en las Matemáticas, contiene varias citas de autoridades y también párrafos de carácter oratorio. Sin duda, es la parte más brillante de la Teoría y vale la pena leerla y disfrutar sus largas frases y florido castellano.

La primera sección trata de la exactitud de las Matemáticas y asegura que en el futuro, debido a la aplicación de la Filosofía Trascendental, no quedarán misterios ni oscuridades en esta ciencia:

> *Y esta esperanza se funda en el hecho, cada vez más patente, de que los puntos más obscuros, por menos explorados o más difíciles para la ciencia, son precisamente aquellos que la ponen en contacto con la filosofía del espíritu humano. De esta filosofía transcendental y crítica es de donde únicamente puede venir la luz: hágase un esfuerzo, remuévase el obstáculo, y ella se derramará a torrentes, inundando con claridad igual todo el cuerpo de la ciencia.* (p. 2)

A continuación se presenta uno de estos puntos oscuros, denominado por Rey el *imaginarismo.* En sus propias palabras, «*el imaginarismo es el scandalum mathematicum*». Y concluye:

> *Es necesaria una teoría transcendental del imaginarismo, que salve todas las contradicciones y dé a la ciencia matemática aquel esplendor e integridad a que tiene derecho con mejores títulos que ninguna otra ciencia*.

Las secciones III y IV continúan con una revisión histórica del desarrollo teórico de la teoría de las cantidades imaginarias. De acuerdo con esta visión, no bastan razones puramente matemáticas para la comprensión de los imaginarios: Algunos opinan que representan la imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones, Condillac es un *idéologue* que piensa que son símbolos carentes de sentido [Condillac 1769], otros creen que son símbolos lógicos, de algunos, como Hoëne Wronski (1778-1853) se cree que intentan subsumir el estudio de los imaginarios en el del infinito, y por último se adjudica a Buée la gloria de haber descubierto la verdadera interpretación de las cantidades imaginarias como la representación de la perpendicularidad. Se citan otros autores favorables a este punto de vista, tales como Joseph Gergonne (1771-1859), Warren, Peacock, M. F. Vallés, citado dos veces como autor de un *Essai sur la philosophie du Calcul* (también lo fué de *Des formes imaginaires en Algèbre: Leur interpretation en abstrait et en concret* (Gauthier-Villars, Paris, 1869 y 1876)) y C. V. Mourey, quien publicó en París *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* en 1818. Según Rey este último introdujo la palabra *versor* para denotar el argumento de un número complejo. Como autores opuestos a este punto de vista se cita a Charles Renouvier (1815-1903) [Renouvier 1950] y Augustin Cournot (1801-1877).

Las Secciones V y VI se dedican a una reflexión sobre el Álgebra y su capacidad para tratar ideas más complicadas que las de la Aritmética. Rey toma partido decididamente y contesta esta cuestión con el siguiente párrafo:

> *¿Puede haber afección o relación geométrica que no sea representable por el Álgebra? Yo digo resueltamente que no: y presento como demostración el contenido material de este libro…,*

Además, continúa diciendo en la página 6 que, de acuerdo con Pierre Simon de Laplace (1749-1824), «aún no se ha hecho la Metafísica de esta ciencia» y que la notación algebraica tiene más capacidad analítica que las manipulaciones puramente aritméticas:

> *Como lengua, alcanza el Álgebra esa superioridad a la que no tiene derecho como ciencia limitada a números*.

Finalmente, y aquí la *Idéologie* aparece bastante clara, afirma que el Álgebra es más que un lenguaje universal para las relaciones y propiedades de los números y que su universalidad no es meramente filológica: Es objetiva y se debe al hecho de que el Álgebra trata de materias que no pueden ser estudiadas por la Aritmética o la Geometría, tanto por separado como juntas.

Para introducir los esquemas kantianos utiliza las Secciones VII y VIII, donde postula que el hacer matemático es innato en la mente humana:

> *...este conocimiento es formado por la virtualidad propia de nuestro espíritu, sin deber a la experiencia más que la ocasionalidad de su excitación; verdad contra la cual tanto se rebela el espíritu sensualista y empírico que heredaron de la Filosofía del siglo anterior los matemáticos, más que ningún otro linaje de pensadores.*

Según Rey, nuestras mentes son más matemáticas de lo que creemos, pues nuestras estructuras mentales se apoyan más en la verdad lógica de juicios y proposiciones, en oposición al lento avance experimental del conocimiento empírico. Este último es de extensión tan reducida que la universalidad y necesidad de las Matemáticas lo desborda. La Filosofía Transcendental, cuando intenta explicar el carácter especial del conocimiento matemático, necesita establecer el carácter puramente subjetivo y la naturaleza formal de espacio y tiempo como bases de las experiencias geométrica y aritmética respectivamente. Estos dos conceptos no se deducen de la experiencia, son anteriores a ella y son condiciones trascendentales de la misma.

La intuición del espacio, una vez liberada de todo elemento fenoménico o sensible, es la de capacidad infinita, simultánea y homogénea en la que no hay nada predeterminado. Por otro lado, la intuición del tiempo es la de una sucesión infinita de momentos esencialmente distintos y transitorios. Rey señala:

> *En esta serie están determinadas las cosas como numerables: la numeración es imposible sin la <u>síntesis sucesiva</u> de la unidad consigo misma…*

La idea de síntesis de la unidad consigo misma es claramente un trasunto de la adición, y la podemos encontrar en las bases axiomáticas de los números naturales, como en la bien conocida formulación de Peano. Rey utiliza esta concepción a lo largo de *Teoría*, en un lenguaje que hoy se nos antoja pintoresco, donde por ejemplo el hecho de que $1 \times 1 = 1$ se describe como *la esterilidad de la unidad bajo el algoritmo de la producción* y otras semejantes.

En la sección IX encontramos una sucinta descripción del Álgebra. Tras considerar a Descartes como el descubridor del Álgebra Científica y a Euclides como el primer autor donde aparecen la Aritmética y la Geometría como disciplinas hermanas, concluye con la citada frase de Pascal, que se presenta aquí por primera vez (p. 16).

La sección X comienza planteando la cuestión de cómo incorporar el problema de los números imaginarios en su programa pascaliano. He aquí la solución:

> *La teoría geométrica de la posición, o analysis sitûs, que era el gran desiderátum de Leibnitz[…]llegará a convertirse en una teoría algébrica ordinaria, desde el momento en que se nos den signos para todas las posiciones de las rectas en el plano indefinido o en el espacio, con tal que estos signos no sean arbitrarios, sino engendrados por el mismo cálculo como resultados algorítmicos necesarios de las teorías de los números.*

En otras palabras, es necesario construir una teoría de los signos, cuyos elementos básicos describan todas las posibles «afecciones de la dirección»: Ahora ya está libre el camino para la aparición en escena de la Lógica Trascendental y las categorías kantianas. Éste es el propósito de las últimas dos secciones, XII y XIII, que presentan una dura vindicación de la Metafísica como elemento radical de las Matemáticas. Helo aquí según Rey (p. 20):

> *¡Horror a la Metafísica los matemáticos, cuando ellos sin quererlo, y sin saberlo, son los primeros metafísicos! ¡Cuando las ideas de espacio, tiempo, movimiento, nada, é infinito aparecen a cada momento como enredadas entre sus teorías, ó siendo la trama de sus cálculos!*

Y termina diciendo que los mejores matemáticos encumbrados por la Historia fueron también profundos metafísicos: Ni Gottfried Leibnitz (1646-1716), René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1642-1727), Pascal o Leonhard Euler (1707-1783) habrían sido tan altos matemáticos si su visión filosófica no hubiera sido tan profunda. Y se pregunta aún ¿Quién ignora que Kant fue matemático antes que crítico? Y lo mismo podría decirse de Reid, Georg Hegel (1770-1831) y Karl Krause (1781-1832). En la página 22 leemos:

> *La crítica kantiana es un admirable trabajo matemático*

Para terminar, presenta una defensa de la crítica kantiana fundamentada en su valor matemático, y la Introducción acaba con el deseo de una larga y fructífera alianza entre la Filosofía y las Matemáticas.

6. 2. Algunos aspectos del cuerpo de la *Teoría*.

El contenido del Libro I está muy próximo al de la Memoria de Buée, siendo el propósito de Rey el de establecer las definiciones y resultados como consecuencias naturales del marco intelectual de las categorías.

Según Rey y su inspirador Buée, las cantidades imaginarias deben entenderse mediante la aplicación del concepto de cualidad. Aquí cualidad significa algo añadido a la cantidad, una especie de adjetivo o atributo modificador, de manera que la propiedad que tienen los números como representación de la cantidad se vea complementada también con un aspecto geométrico. El caso más sencillo es el de los números negativos, donde el signo menos o guión antepuesto a un número indica la inversión del sentido de los segmentos, emanantes de un origen fijo, que representan a los números originales sobre una línea recta. Hay una diferencia importante entre la nomenclatura de Buée y Rey y la actual. Para ellos, *línea* es lo que hoy entendemos por segmento finito, y *dirección* indica la elección de un sentido a lo largo de una recta. El estatus matemático de las cantidades negativas fue estudiado concienzudamente a finales del siglo XVIII, por ejemplo, en la largamente olvidada Memoria de Wessel publicada en Copenhague, y en 1802 el filósofo y posteriormente masón Krause, citado por Rey en las páginas 22 y 32 de *Teoría*, defendió en Jena una *Habilitationsschrift* dedicada a este tema con el título *De philosophiae et matheseos notione et earum intima coniunctione*. Se puede encontrar también una interesante revisión del carácter romántico de este asunto en [Dhombres 2003]. Krause, que tuvo cierta influencia en círculos intelectuales españoles e hispanoamericanos durante el siglo XIX, escribió un segundo ensayo sobre los mismos asuntos en 1804 titulado *Grundlagen eines philosophischen Systems der Mathematik*. Los fundamentos de las cantidades imaginarias fueron finalmente establecidos por Carl Friedrich Gauss (1770-1855) [Gauss 1831], y la estructura algebraica de cuerpo de los números complejos fue dada a conocer por Hamilton por esos mismos años.

Cuando aparece un objeto matemático (por ejemplo alguna clase de número descubierta como resultado de manipulaciones algebraicas) dotado de una doble consideración cuantitativa y cualitativa, el principal problema es el de acomodar las reglas de cálculo a esta nueva situación de modo y manera que las antiguas reglas se conserven como casos particulares de las de este nuevo ámbito más general. Esta propiedad, ya observada por Wessel, fue establecida por primera vez por Peacock y se conoce como *ley de la conservación de las propiedades formales*. En 1867 mereció un largo comentario de Hermann Hankel (1839-1873) en su obra *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetzten*[3]. Por ejemplo, la regla de los signos[4] constituye un caso particular, y las reglas aritméticas del cálculo con complejos proporcionan otro. La intención de Rey fue basar estas últimas reglas en el marco de la teoría kantiana de las categorías, para lo cual escogió dos categorías y sus juicios asociados de la siguiente tabla, las subcategorías de la cualidad «negación» y «limitación»:

Categorías Matemáticas	**Subcategorías**	**Juicios**
Cantidad	Unidad	Universal
	Pluralidad	Particular
	Totalidad	Singular
	Realidad	Afirmativo

[3] *„Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen“.*

[4] Rey cita a Jean LeRond D'Alembert (1717-1783) y a Lazare Carnot (1753-1823) en la p. 33 de *Teoría* con relación a la problemática interpretación de esta regla.

Cualidad	**Negación**	**Negativo**
	Limitación	**Limitativo**

Con esta elección, Rey encuentra la herramienta definitiva para encontrar la diferencia entre «no(ser *B*)» y «ser(no *B*)» que explotará como origen de la interpretación cualitativa del signo de cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$.Todas las posibles direcciones en el plano[5] representan las diversas cualidades, de modo que podemos elegir un eje para representar una cualidad particular *B*, y en él un origen *O* separará las ideas «poseer *B* positivamente» o «poseer *B* negativamente». Así, si $R(A,B)$ significa que se ha elegido un punto *A* en la parte positiva del eje *B*, entonces $R(A,\neg B)$ significará que *A* ha sido elegido en la parte negativa. Para cualquier otra dirección que no sea *B* lo que ocurre es $\neg R(A,B)$, de modo que se cumple necesariamente la relación

$$R(A,\neg B) \neq \neg R(A,B)$$

Sin embargo, existen grados[6] en cuanto a «ser *B*» o no, que quedarán representados por todas las direcciones definidas por el origen y por los puntos de una circunferencia que pase por *O* y cuyo centro *C* satisfaga $R(C,B)$. Por tanto, la única dirección cuyo representante geométrico solo tiene un punto común con la circunferencia será la perpendicular al eje trazada por *O*, y representará la completa indiferencia con respecto a la cualidad *B*. Lo cual conduce a Rey a adoptar provisional y arbitrariamente el símbolo $\sqrt{-1}$ como signo de cualidad, en igualdad de usos con + ó –, para denotar la perpendicularidad como representación de la total indiferencia respecto de la cualidad *B*.

La idea anterior, aunque atractiva, tiene poca utilidad en la práctica matemática, por lo que Rey se embarca en su justificación combinándola con el problema clásico de la extracción de raíces cuadradas de números negativos. Leamos las palabras del propio Rey (*Teoría*, p. 51):

> *En el anterior capítulo he considerado el símbolo* $\sqrt{-1}$ *como un signo de limitación ó de neutralidad perfecta, entre la afección positiva y la negativa, ó como la expresión más propia de un grado máximo de indiferencia respecto de aquellas direcciones fundamentales. Sin embargo, por su forma radical revela el signo* $\sqrt{-1}$ *un origen algorítmico potencial, y simboliza la totalidad de una teoría inmensa, de la cual no son sino determinaciones particulares los tres momentos típicos representados por los signos* $+, -, \pm\sqrt{-1}$ *correspondientes a los tres conceptos, <u>realidad</u>, <u>negación</u> y <u>limitación</u>. En la teoría de la potencialidad, ó sea de la graduación, está el germen de la teoría cualitativa.*

Esta excursión acerca de la cualidad simbólica de $\sqrt{-1}$ y de la posible conexión con cuestiones algebraicas y no metafísicas constituye el núcleo de la argumentación de Rey, revelando el origen filológico, semiótico e *idéologique* de su investigación.

---

[5] Una pregunta natural sería ¿por qué restringirse al plano? Tal vez su extensión al espacio hubiera llevado a Rey a redescubrir los cuaterniones…

[6] En cierto sentido, ya se estaba aplicando la Lógica Borrosa.

Volvamos a la construcción de la raíz cuadrada de -1. Rey opina que la raíz de -1 no puede ser ni -1 ni $+1$, pues «*según la doctrina común y verdadera de los algebristas*», o regla de los signos, el cuadrado de cualquiera de los dos será $+1$. Luego –del mismo modo que Wessel y Buée habían indicado sesenta años antes– la raíz ha de hallarse en alguna dirección fuera de la dirección principal definida por -1 y $+1$, de modo que continúa, en su estilo retórico:

> *...la posición indirecta, que corresponde a la raíz $\sqrt{-1}$, debe constituir un grado tal de evolución cualitativa respecto de la unidad positiva, que repetido este grado en igual razón y manera progresiva, constituya a su vez la segunda potencia -1...*

Notamos en este texto un uso inadecuado de $\sqrt{-1}$, pues es un caso donde debería de haberse empleado la expresión «*la raíz cuadrada de* -1» en lugar del símbolo. Este error muestra que Rey tenía dificultades para distinguir conceptos cuando intentaba traducirlos en fórmulas matemáticas. En cualquier caso, lo interesante del párrafo es que la unidad positiva $+1$ sufre una evolución cualitativa que la va llevando sucesivamente a otras direcciones distintas de la suya propia antes de alcanzar la parte negativa del eje. Por supuesto Rey no lo explicita, pero es claro que está pensando en una rotación del eje positivo alrededor del origen sin salirse del plano, idea expresada por Gauss en 1831. Según esta representación, la raíz cuadrada de -1 se obtendrá tras alguna evolución particular, de modo que iterando esa misma evolución sobre la raíz cuadrada se llegará al cuadrado -1 de modo supuestamente natural. Pero la única dirección con esta propiedad es la perpendicular, y concluye:

> *Luego la perpendicular representa la raíz segunda de -1, y el símbolo radical $\sqrt{-1}$ es a su vez genuina expresión de la perpendicularidad.*

A continuación lleva a cabo la deducción anterior en notación matemática con pretensiones de generalidad: Sea p el *coeficiente o evolución particular* que actúa sobre a para obtener la raíz cuadrada de $-a$, esto es, $p(a) = pa = SQRT(-a)$. Entonces,

> *...es claro que, repitiendo esta modificación sobre la raíz, quedará constituida la segunda potencia $-a$, y se tendrá…*

En fórmulas, escribiremos:

$$p(p(a)) = p(pa) = p^2(a) = p^2 a = -a$$

y dividiendo la última ecuación por *a* encontramos el resultado buscado:

$$p^2 = -1, \text{ o su equivalente } p = \pm\sqrt{-1}$$

Vale la pena un estudio crítico detallado de esta argumentación, pues aparecen algunos fallos o puntos oscuros en ella:

- No se hace notar que *a* tiene que ser positivo. En caso contrario el argumento, que se reduce a dos rotaciones de igual ángulo, no resultaría válido.
- Más importante es el hecho de que el razonamiento no funciona cuando $a \neq 1$. Con objeto de satisfacer las reglas habituales de la extracción de raíces, ha de

producirse una modificación de la magnitud (longitud) simultáneamente a la rotación. Supongamos, por ejemplo, que $a > 1$. Entonces, en la primera aplicación, la acción de p se compone de la rotación y de la reducción $a \to +\sqrt{a}$. Luego la segunda aplicación de p tendría que componerse de la rotación y un alargamiento $+\sqrt{a} \to a$. En otras palabras, ¡sería una p diferente!

- La ecuación $p^2 = -1$ no es una ecuación numérica, sino puramente formal, cuya interpretación correcta es que la iteración de un operador que actúa sobre una cantidad positiva hace aparecer su cantidad opuesta, con lo cual el origen algebraico de $\sqrt{-1}$ sigue permaneciendo en la oscuridad.

La explicación de Rey se halla inspirada en el argumento de la Memoria de Buée, que es mucho más sencillo. Liberados de aspectos retóricos, ambos razonamientos se reducen a la aplicación a entidades operacionales –cuyos modelos son rotaciones del plano alrededor de un punto fijo– la idea de media proporcional conocida de la aritmética.

Los Libros II, III, y IV de *Teoría* contienen las manipulaciones algebraicas con números complejos. Rey utiliza la siguiente nomenclatura: *Síntesis* para la suma o adición, *producción* para la multiplicación, y *graduación* para elevar a potencias. Cuestiones de nombres aparte, Rey presenta y explica la suma por componentes y la multiplicación como operaciones sincategoremáticas, indicándonos que considera conjunta los aspectos cuantitativos y cualitativos de tales entidades. Ya en 1831 Augustin Cauchy (1789-1857) había estudiado los números complejos como pares ordenados [Cauchy 1831], [Pérez-Fernández 1999]. Sin tener en cuenta esos mínimos toques filosóficos, los Libros II y III son de contenido clásico y no presentan novedad alguna. El libro IV, dedicado a la *graduación*, es mucho más interesante.

6. 3. El Libro IV y la capacidad matemática de Rey

El lector del Libro IV puede observar en él los conocimientos matemáticos de Rey y hasta qué punto los había comprendido y asimilado. Comienza el Libro con algunas ideas generales sobre la graduación y cómo actúa con cantidades positivas (graduación *cuantitativa*) y negativas (graduación *cualitativa*), señalando que la diferencia entre ambas es el comportamiento oscilatorio de la segunda. También establece el carácter oscilatorio (p. 169 y sigs.) de las sucesivas potencias de $\sqrt{-1}$ cuando extiende sus consideraciones al campo de los números complejos. Esto lo consigue tras un largo preámbulo donde se reconoce la validez de la operación a partir del plan inicial de Rey. También se dedican una pocas páginas a la *involución* o extracción de raíces como operación inversa de la graduación.

En la p. 179, al intentar hallar la forma binómica de $\left[\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{m}}$, Rey no duda en usar *un número infinito de veces* la fórmula generalizada del binomio de Newton para encontrar el desarrollo en serie de

$$\left[\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{m}} = \left[1-(1-\sqrt{-1})\right]^{\frac{1}{m}},$$

la primera vez para desarrollar la expresión global, y las restantes para sustituir la correspondiente expresión cada vez que aparece $(1-\sqrt{-1})^p$. El lector deber concluir que para Rey, el argumento de autoridad que supone invocar el nombre de Newton deberá de prevalecer sobre cualquier otra consideración acerca de convergencia, infinitos actuales o potenciales, etc. etc. Aquí ya no hay Metafísica: simplemente está utilizando reglas bien conocidas y ello le parece argumento suficiente para aceptarlas sin más. Eso estaba bien en la época de Buée, pero debemos de recordar que, cuarenta años antes, Cauchy ya había intentado introducir el rigor en estas cuestiones.

También se consideran extensamente los polinomios ciclotómicos y se presenta una teoría trigonométrica de los imaginarios (p. 233 ff.), tema ya estudiado por los autores que desarrollaron la variable compleja. Ya se encuentra en Buée y era moneda corriente en sesiones académicas por toda Europa, como muestra por ejemplo [Svanberg 1812]. Se dedica bastante atención a las construcciones gráficas, y finalmente alcanzamos el Capítulo VII sobre la graduación infinita de cantidades imaginarias.

Rey explica, bajo el bastante misterioso título de *Inevolubilidad esencial de la unidad bajo el concepto de cantidad*, que la unidad 1 se mantiene igual sin importar el exponente –incluso si es infinito– al llevar a cabo la graduación $(1)^m$. A continuación nos asegura que si la unidad es perturbada por adición de una cantidad infinitesimal, la graduación evolucionará fructíferamente, para lo cual hace aparecer la magnífica fórmula [Euler 1748, Capítulo VII] :

$$\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{\infty}{1}\times\frac{\mu}{\infty}+\frac{\infty^2}{1\cdot 2}\times\frac{\mu^2}{\infty^2}+\frac{\infty^3}{1\cdot 2\cdot 3}\times\frac{\mu^3}{\infty^3}+\ldots$$

y trabajando *à la* Euler, los infinitos se eliminan y tras hacer $\mu=1$ encontramos el número *e*. Tras ello establece la propiedad fundamental

$$e^p=\left(1+\frac{p}{\infty}\right)^{\infty}$$

y da una idea del cálculo práctico de logaritmos.

En la p. 203 presenta una nueva versión del misterioso título: *Inevolubilidad de la unidad positiva bajo el concepto de calidad. Número <u>e</u> cualitativo.* Parece natural que Rey quisiera eliminar tal comportamiento no evolutivo por indeseable adaptando el razonamiento anterior al caso en que $\mu=\sqrt{-1}$. Con el mismo espíritu define el *número cualitativo*:

$$\mathsf{E}=\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Y muy esperanzado escribe, cuando intenta hallar una expresión binómica para E:

> *En esta serie, cuya estructura es ya conocida [...] es <u>posible reconocer la convergencia</u> de los términos reales cuya suma es α, y de los coeficientes de los imaginarios cuya suma es β, a un punto común en que ambas sumas se hacen iguales; de suerte que en el límite en que esto se verifica es un punto de tal*

naturaleza, que respecto de él se tiene $\alpha = \beta$ *y la expresión sumatoria de la serie infinita es* $\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty} = \alpha + \alpha\sqrt{-1}$.

Desgraciadamente esto no es cierto. La frase de Rey «*es posible reconocer...*» hubiese quedado mucho mejor aplicada si hubiera reconocido en **E** la exponencial

$$e^{\sqrt{-1}} = 0.540302... + 0.841471...\sqrt{-1},$$

que de alguna manera es un *complejo unitario* en el sentido de poseer módulo 1 y argumento un radián, esto esto es, $1_{\theta=1}$. Ello estropea la hermosa simetría que Rey esperaba obtener de haberse encontrado el valor que postulaba, **E** $= \sqrt{\sqrt{-1}}$.

Los párrafos finales del libro son igualmente decepcionantes. Las ideas de Buée y Argand sugieren de manera inmediata la posibilidad de extender al espacio la teoría de la perpendicularidad. ¿Será posible representar la perpendicularidad de una recta con respecto a un plano mediante alguna cantidad compleja $a + b\sqrt{-1}$? Ya François Servois (1768-1847) había intentado resolver negativamente la cuestión, estableciendo un precedente de la teoría de los cuaterniones que más tarde desarrollaría Hamilton. Nuestro autor, Rey, establece sin embargo que la exponencial doblemente imaginaria $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ es el número adecuado, y su justificación se contiene en el siguiente párrafo, bastante críptico (p. 284):

> *Que tal debe ser la evolución, se infiere del efecto natural de los exponentes reales sobre una base imaginaria. Si el exponente positivo le imprime una moción progresiva, el exponente cero la coloca sobre el radio, y el negativo la hace retrogradar por bajo de esta posición; el imaginario la elevará desde este origen de los arcos por un arco que puede llamarse imaginario como perpendicular a los arcos positivo y negativo.*

Por tanto, las seis cantidades,

$$\left\{+1,-1,+\sqrt{-1},-\sqrt{-1},+\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}},-\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}\right\}$$

se postulan como sistema básico del cual deducir la Geometría del Espacio. Por supuesto, Rey no intenta probar en lo que queda de libro que $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ pueda expresarse en la forma $a + b\sqrt{-1}$: Simplemente opina que es una nueva clase de complejo cantidad imaginaria. Y lo mismo hicieron varios de sus seguidores (ver más adelante) incluso a sabiendas de que $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ es un número real.

En la página 291, justo antes de la traducción del fragmento de Kant y del glosario final, Rey lleva a cabo una síntesis de todo su trabajo en tres lemas, añadiendo además a qué campo intelectual se aplica cada uno:

1. El símbolo $\sqrt{-1}$ es un signo de perpendicularidad (Buée)[7]. Este es un pensamiento matemático puro.
2. Los números imitan al espacio, aunque son de naturaleza tan diferente. (Pascal). Este pertenece a la Filosofía Matemática.
3. La tabla de categorías contiene todos los momentos de cualquier proyecto de especulación, indicando incluso su ordenación en el tiempo (Kant)[8]. Este pertenece a la Filosofía Trascendental.

7. Algunos epígonos de Rey

Las teorías de Rey gozaron de cierta popularidad en los años subsiguientes y algunos matemáticos y profesores las incorporaron en sus textos, tal como se desprende de [García de Galdeano 1899] y de las palabras de Julio Rey Pastor (1888-1962), uno de los fundadores de las Matemáticas españolas contemporáneas [Rey Pastor 1915]. Presentamos aquí a algunos de estos seguidores.

7.1. Rochano

José Antonio Rochano Alemany, que fue profesor en Granada, aparece como devoto discípulo de Rey, a quien al parecer conoció personalmente. En 1870 publicó sus *Elementos de Algebra* [Rochano 1870], texto que presenta una mezcla de copia de *Teoría* y de otros aspectos algebraicos más corrientes, tales como MCDs y demás. Rochano cita explícitamente a Rey en su texto e insiste en los aspectos más polémicos de *Teoría*, tal como los imaginarios esféricos, pero no presenta avance alguno sobre Rey. No hemos encontrado ninguna otra actividad matemática de Rochano al preparar este trabajo. Veamos una muestra de su prosa, un comentario al hecho de que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ es un número real:

> *Consecuencia importante. Luego el producto de dos imaginarios es REAL. ¿Cómo se ha obrado este milagro? ¿Con que dos cantidades simbólicas, quiméricas, imposibles, visionarias, combinadas por la vía de la producción, dan una cantidad que ya no es quimérica y visionaria?...*

7.2. Domínguez Hervella

Otro profesor, el oficial de Marina Modesto Domínguez Hervella, publicó unos apuntes hacia 1870 con el título de *Elementos de Geometría analítica*, que después fueron dados a la imprenta con igual título en 1879 [Domínguez 1879]. Hemos utilizado una copia de esta edición. El libro comienza con una cita de la Introducción de *Teoría*, y muchas de las ilustraciones están claramente inspiradas en las originales del texto de Rey. Hervella es mucho más técnico que Rey o Rochano, pero aún se adhiere al uso de

[7] Ainsi $\sqrt{-1}$ est le signe de la perpendicularité, dont... [Buée 1806], p. 28.

[8] Rey presenta una versión reducida de la frase original de la Sección 3, Párrafo 11 de *Des transzendentales Leitfadens der Entdeckung aller reinen Verstandbegriffe*: *„Denn daß diese Tafel im theoretischen Teile der Philosophie ungemein dienlich, ja unentbehrlich sei, den Plan zum Ganzen einer Wissenschaft, sofern sie auf Begriffen a priori beruht, vollständig zu entwerfen, und sie mathematisch nach bestimmten Prinzipien abzuteilen, erhellt schon von selbst daraus, daß gedachte Tafel alle Elementarbegriffe des Verstandes vollständig, ja selbst die Form eines Systems derselben im menschlichen Verstande enthält, folglich auf alle Momente einer vorhabenden spekulativen Wissenschaft, ja sogar ihre Ordnung, Anweisung gibt, wie ich denn auch davon anderwärts eine Probe gegeben habe“.*

$\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ para el estudio de la Geometría del Espacio, incluso sabiendo que es un número real. En un informe de la *Real Academia de Ciencias* incluido en el libro[9] , un revisor anónimo reprocha al autor no utilizar el sistema de Hamilton en lugar de la vieja, desfasada y errónea doble exponencial imaginaria.

7.3. Navarro

Luciano Navarro Izquierdo, profesor de Salamanca, publicó en 1874 un *Tratado de Geometría elemental y Trigonometría rectilínea y esférica*, libro que tuvo dos ediciones más en 1883 y 1887. En este trabajo hemos utilizado un ejemplar de la segunda edición [Navarro 1883]. Este autor utiliza libremente ideas tomadas de Rey a pesar de no citarlo expresamente, y utiliza complejos en cálculos trigonométricos rutinarios tales como la obtención de las fórmulas del ángulo doble. Fue también autor de un *Tratado de Aritmética y Álgebra* aparecido en 1875, así como de un informe o nota de 1886 sobre el método de Bernardino de Sena para la aproximación de raíces cuadradas. Veamos una muestra de la escritura de Navarro, en *Geometría* (p. 23), donde introduce el concepto cualitativo de dirección:

> *Puesto que la cualidad de la cantidad no es otra cosa que su modo de ser u obrar con relación a la tomada por unidad, es evidente que toda recta, cuya dirección sea la misma que la de la unidad, es de la misma cualidad que ésta, siendo de cualidad distinta si su dirección es diferente: la cualidad de una recta no es otra cosa, pues, que la dirección de la misma respecto de la unidad.*

A continuación sigue con el mismo cálculo formal de Rey para obtener que $\sqrt{-1}$ es el signo de perpendicularidad.

7.4. Lubelza

Otro seguidor fue el Ingeniero de Minas Joaquín Lubelza, que fue profesor de la *Escuela de Minas* de Madrid. Fue autor de un texto de Cálculo prácticamente actual publicado en 1905 [Lubelza 1905] titulado *Cálculo Infinitesimal*, que previamente había circulado en forma de apuntes hacia 1901. Curiosamente, la Introducción trata los cuaterniones, citando a Rey como descubridor de la calidad sincategoremática de la suma de vectores (a los que llama *rectores*). Lubelza escribió un breve manual de Mecánica en 1901, así como un artículo en 1902 sobre las fuerzas centrífugas.

8. Conclusiones

Es sabido (véase p. ej. [Pacheco *et al.* 2006]) que la diseminación, enseñanza y estudio de las Matemáticas fue una actividad poco organizada en España durante la primera mitad del siglo XIX. Sólo un puñado de personajes casi aislados trabajaron en este campo, recluidos en las escuelas militares y en la enseñanza media. Los avances que se iban sucediendo en Europa llegaban tarde, a menudo en informes de segunda mano, y no resulta sorprendente que los autores españoles siguieran apegados a la tradición del siglo XVIII en sus aspectos más prácticos, o bien que estudiaran algunas cuestiones a medio camino entre las Matemáticas y la Filosofía que a primera vista no requerían unos conocimientos matemáticos profundos.

[9] Un informe positivo garantizaba la venta de trescientas copias para las bibliotecas públicas del país.

En este trabajo hemos considerado un caso del último tipo: La recepción y extensión de las explicaciones metafísicas de los números imaginarios y cómo influyeron en las Matemáticas españolas durante unos cincuenta años. La crisis de fundamentos de la segunda mitad del XIX tuvo poco impacto en España [Pacheco 1991], con toda seguridad debido al poco desarrollo tecnológico del país, puesto que debemos recordar que una gran cantidad de los problemas de Fundamentos tuvieron su origen en el florecimiento de diversas clases de máquinas [Fernández y Pacheco 2005]. Uno de los resultados de la crisis fue la exigencia de rigor en los dos sentidos señalados en la Introducción, lo cual contribuyó a un estudio consistente de los modelos matemáticos subyacentes a las entonces nuevas tecnologías.

El trabajo de Rey intentó ser riguroso en los aspectos lógicos y metafísicos, pero fracasó en la aplicación del rigor «matemático», tal como se mostró en el Nº 6. Por ello no resulta extraño que la obra de Rey gozara de una larga popularidad muy por encima de su valor matemático, ensalzado por ejemplo en [García de Galdeano 1899] y en [Rey Pastor 1915]. Estamos ante un caso donde la distinción apuntada por Grattan-Guinness entre Historia y Tradición es perfectamente aplicable [Grattan-Guinness 2004]. Sin embargo, hay que reconocer a Rey el mérito de enfrentarse a un problema realmente duro con la idea ingenua de que podría resolverse desde su inicio con la aplicación de técnicas puramente filosóficas. Aunque sólo fuera por ello, merece un lugar en la historia de las Matemáticas españolas del siglo XIX, incluso aunque sepamos que el resultado final fue un fiasco y que muchos problemas quedaron aún sin solución.

Referencias

ALBARES, R., 1996. Los primeros momentos de la recepción de Kant en España. *El Basilisco* 21, pp. 31-33. Edición electrónica en www.filosofia.org

BUÉE, A. Q. (L'Abbé), 1806. Mémoire sur les quantités imaginaires. *Phil. Trans. Roy. Soc. 96*, pp. 28-88.

CALERO, M.L., 1994. Un representante de la «Ideología» en España: José María Rey Heredia (1818-1861) En: Schlieben-Lange, B. (Ed) *Europäische Sprach-wissensschaft um 1800, Bd 4,* Nodus Publikationen, Münster.

CAUCHY, A., 1831. Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites. Oeuvres, Série 2, Tome II, pp. 169-183.

COLBURN, W., 1831. *Arithmetic upon the Inductive Method of Instruction: being a Sequel to Intellectual Arithmetic*. Nilliar, Gray, Little & Wilkins, Boston.

CONDILLAC, L'ABBE, 1779. *La logique ou les premiers développements de l'art de penser*. (Traducción española, Aguilar Eds, Buenos Aires, 1956. Incluye también la traducción de *Extrait raisonné du « Traité des sensations »*).

CUESTA, N., 1985. *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su Introducción en España.* Ediciones de la Universidad de Salamanca.

DE HAAN, B., 1863. *Over de magt van het zoogenaamd onbestaandbaren in de Wiskunde* (Sobre la importancia de los llamados imposibles en Matemáticas) Drabbe Editor, Leiden, en www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/haan1.html

DHOMBRES, J., 2003. La ciencia es joven: La motivación romántica de algunos científicos a principios del Siglo XIX. En: Montesinos. J., Ordóñez, J., and Toledo, S. (Eds), 2003. *Ciencia y Romanticismo*,. También en formato electrónico en la dirección http://nti.educa.rcanaria.es/fundoro/mhc_indice_romant.htm

DOMÍNGUEZ HERVELLA, M., 1879. *Elementos de Geometría Analítica*. Establecimiento Tipográfico de E. Cuesta, Madrid.

EULER, L., 1748. *Introductio in analysin Infinitorum*, Lausanne. (Facsímil y traducción española editados por F.J. Pérez-Fernández and A. Durán, Sevilla, 2000)

FLAMENT, D., 1982. *Adrien-Quentin Buée (1748-1826), un inconnu ; l'idée d'une algèbre-langue*. Publications de l'IRMAR, Rennes.

GARCIA DE GALDEANO, Z., 1899. Les Mathématiques en Espagne, *L'Enseignement Mathématique* I, pp. 1-21.

GAUSS, C., 1831. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda.

GILBERT, D., 1831. On the nature of negative and imaginary quantities. *Phil. Trans. Roy. Soc*. 121 pp. 91-97.

GRATTAN-GUINNESS, I., 2004. The Mathematics of the Past : Distinguishing its History from our Heritage. *Historia Mathematica* 31, pp. 163-185.

HOÜEL, J., 1874. *Théorie Élementaire des Quantités Complexes*. Gauthier-Villars, Paris.

KLEIN, F., 1926. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Springer-Verlag, Berlin.

LUBELZA, J., 1908. *Lecciones de Cálculo Infinitesimal*. Imprenta de Jaime Ratés, Madrid.

MATZKA, W., 1851. Versuch einen richtigen Lehre von der Realität der vergeblich imaginären Grössen der Algebra. *Abhandl. der Königl.-Böhmischen Ges. der Wissenschaft*, 6, pp. 181-360.

MÉNDEZ BEJARANO, M., 1927. *Historia de la filosofía en España hasta el siglo XX*. Edición electrónica en www.filosofia.org

NAVARRO IZQUIERDO, L., 1883. *Tratado de Geometría Elemental*. Imprenta de V. Oliva, Salamanca (segunda edición).

PACHECO, J., 1991. Crisis de Fundamentos en las Matemáticas Españolas a finales del Siglo XIX. *Suma* 7, pp. 75-79.

PACHECO, J., Fernández, I., 2005. On the Role of Engineering in Mathematics Development. *European Journal of Engineering Education* 34 pp. 81-90.

PACHECO, J., PÉREZ-FERNÁNDEZ, F., SUÁREZ, C., 2006. Numerical solving of equations in the work of José Mariano Vallejo. *Archive for History of Exact Sciences* (en prensa).

PÉREZ-FERNÁNDEZ, F., AIZPURU, A., 1999. El «Cours d'Analyse» de Cauchy, *Suma* 30, pp. 5-26.

PASCAL, B., 1977. (Ed. por M. LeGuern). *Pensées*, Folio-Gallimard, Paris.

PICAVET, F., 1891. Les idéologues. En la dirección web www.uqac.uquebec.ca/zone30/Classiques_des_Sciences_sociales/index.html

REID, T., 1764. An *Inquiry into the Human Mind on the Principles of Common Sense*. (Traducción española de Ellen Duthie, 2004), Trotta, Madrid.

RENOUVIER, C., 1950. *Historia y solución de los problemas metafísicos*, Hachette, Buenos Aires.

REY HEREDIA, J., 1849. *Elementos de Lógica*. Imprenta Suc. de Rivadeneyra, (1883, 12ª edición), Madrid.

REY HEREDIA, J., 1865. *Teoría Transcendental de las Cantidades Imaginarias*. Imprenta Nacional, Madrid.

REY PASTOR, J., 1915. ¿Es el progreso de España en las Ciencias, ó es el progreso de las Ciencias en España? *Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias en Valladolid*. Madrid.

SMITH, D., 1953. *History of Mathematics*. Dover Publications, New York.

SMITH, D., 1959. *A source book in Mathematics*. Dover Publications, New York.

SUÁREZ, C., 2006. *La introducción del rigor en las Matemáticas españolas del Siglo XIX*, *Tesis Doctoral* (Tesis Doctoral), Universidad de Cádiz.

SVANBERG, J., 1812. Om trigonometriska funktioners deduction ur eqvation $y^R - I = 0$. *Kungliga Vetenskaps Akademi Årböcker för* 1812, 246 ff., Stockholm.

WESSEL, C., 1797. Om directionens analytiske betegning (Sobre el significado analítico de las direcciones) The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen. (Traducción francesa de H. Zeuthen, 1897).

WOODHOUSE, R., 1801. On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by Imaginary Quantities, *Phil. Trans. Roy. Soc*. 91, pp. 89-119.

WOODHOUSE, R., 1802. On the Independence of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be derived from their Separation. *Phil. Trans. Roy. Soc*. 92, pp. 85-125.